TD agreg

Lionel Fourquaux

15 novembre 2010

1 Trigonométrie du triangle

On considère un triangle ABC, et l'on note :
- α, β, γ les angles en A, B, C respectivement ;
- a, b, c les longueurs des côtés opposés à A, B, C respectivement ;
- p le demi-périmètre ;
- R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit ;
- $\mathcal{A}$ l'aire du triangle.

Retrouver les formules bien connues suivantes.

1. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
2. $\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
3. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
4. $\mathcal{A} = \frac{bc}{2} \sin \alpha = pr$
5. $\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
6. $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
7. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

Quel est le rayon du cercle exinscrit en A ?
Quelle est la distance de A au milieu de BC ?

2 Réunion de sous-groupes

La réunion de deux sous-groupes peut-elle être un sous-groupe ? Préciser.

3 Quelques calculs explicites sur les groupes abéliens

Écrire $(\mathbb{Z}/651\mathbb{Z})^*$ comme produit de groupes cycliques, et expliciter l'isomorphisme.

4 Factorisation sur les corps finis

Décomposer le polynôme $X^4 + 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_7[X]$.

5 Une suite linéaire récurrente

On considère la suite d'entiers définie par

(i) $u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$;

(ii) $u_{n+3} = u_n + u_{n+1}$ pour $n \geqslant 0$.

Montrer que si p est un nombre premier, alors u_p est multiple de p. (On pourra déterminer l'image de u_n dans un corps bien choisi. Notez que, comme pour le petit théorème de Fermat, la réciproque est fausse).

6 Partitions d'entiers

Si n est un entier naturel non nul, on appellera *partition de* n une égalité

$$n = n_0 + \cdots + n_k$$

avec $n_0, \cdots, n_k$ des entiers naturels non nuls.

Montrer que le nombre de partitions de n en entiers impairs est égal au nombre de partitions de n en entiers distincts, en construisant une bijection explicite entre les deux. (On pourra considérer l'écriture en base deux des entiers n_i).

7 Matrices extrémales

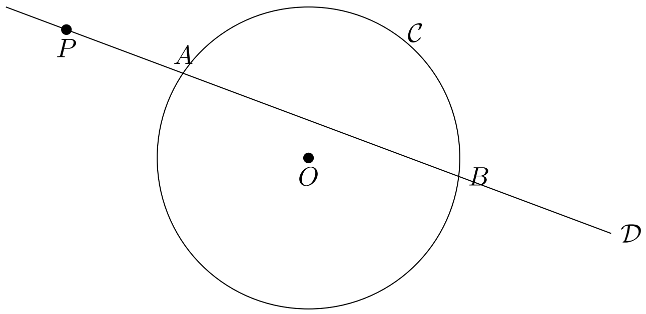
On considère la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme d'application linéaire associée à la norme euclidienne (i.e. $\|M\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|M(x)\|_2}{\|x\|_2}$. On dit qu'un point de cette boule est extrémal s'il n'est pas le milieu d'un segment non réduit à un point dont les extrémités sont dans la boule. L'objectif de cet exercice est de montrer que l'ensemble des points extrémaux de la boule unité est exactement l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales.

1. Notons $\mathcal{B}$ la boule unité. Si $A = \frac{U+V}{2}$ est orthogonale et si U et V sont dans $\mathcal{B}$, montrer que U et V sont orthogonales et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs $U(x)$ et $V(x)$ sont colinéaires. En déduire que A est extrémale.
2. Si $A \in \mathcal{B} \setminus O_n(\mathbb{R})$, montrer que A n'est pas extrémale. On pourra utiliser la décomposition polaire de la matrice A, noter qu'une matrice symétrique peut être diagonalisée dans une base orthonormée, et noter que les valeurs propres ainsi obtenues sont dans l'intervalle $[-1, 1]$.

8 Puissance d'un point par rapport à un cercle

On se place dans le plan euclidien. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, de centre O et de rayon r, et soit P un point.

On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par P et coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. On appelle puissance de P par rapport à $\mathcal{C}$ le produit $\overline{PA}\,\overline{PB}$ (en tenant compte des orientations). Montrer que ce produit ne dépend pas du choix de $\mathcal{D}$. Discuter le cas où $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$.



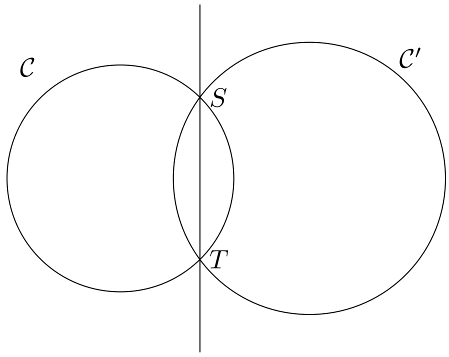
Montrer que :

(i) P est à l'intérieur du disque de bord $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance est strictement négative ;

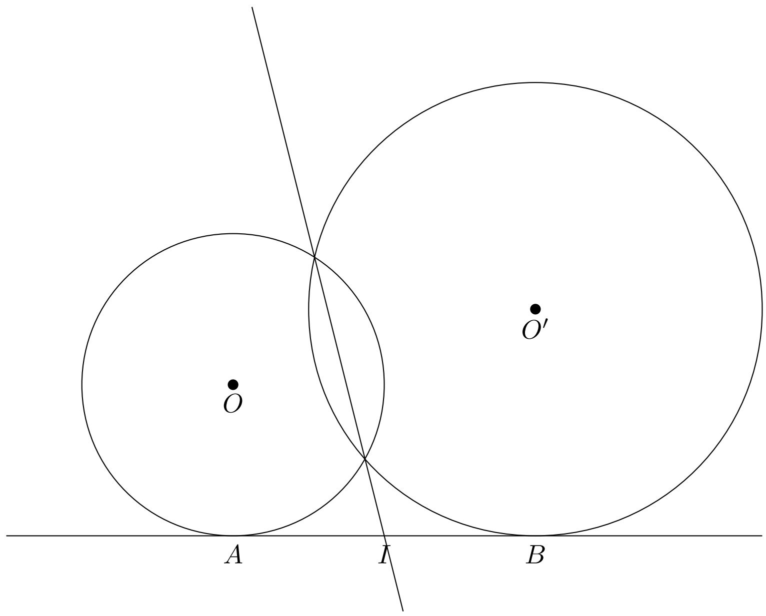
(ii) P est sur $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance est nulle ;

(iii) P est à l'extérieur du disque de bord $\mathcal{C}$ si et seulement si sa puissance est strictement positive.

On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques. Montrer que l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$ est une droite, orthogonale à la droite passant par les centres de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points S et T, montrer que c'est la droite (ST).

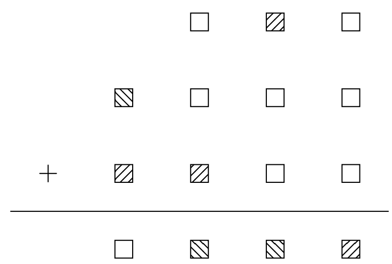


Dans la figure suivante, qu'est le point I ?



9 Équation diophantienne linéaire

Retrouver les chiffres correspondant à l'addition.



10 Anneaux non euclidiens

1. Soit A un anneau euclidien (qui n'est pas un corps). Montrer qu'il existe un $x \in A$, non nul et non inversible, tel que la projection canonique $A \twoheadrightarrow A/(x)$ induise une surjection $A^\times \cup \{0\} \twoheadrightarrow A/(x)$.
2. Montrer que $A/(x)$ est alors un corps.
3. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$, pour un entier $N < 0$ sans facteur carré. Déterminer $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]^\times$.
4. Si $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{N}]$, calculer le cardinal de $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]/(x)$.
5. en déduire que si $N < -3$ alors l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$ n'est pas euclidien.
6. Qu'en est-il pour $N = -1$? pour $N = -2$?