TD agreg

Lionel Fourquaux

29 novembre 2010

1 Corps finis 1

Soit $P = X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$. Posons $\mathbb{L} = \mathbb{F}_3[X]/(P)$ et α la classe de X dans $\mathbb{L}$.

1. Montrer que $\mathbb{L}$ est un corps. Quelle est sa caractéristique ? Son cardinal ? Donner une base du $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel $\mathbb{L}$.
2. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de $\mathbb{L}^* \setminus \mathbb{F}_3^*$ (dans le groupe $\mathbb{L}^*$).
3. L'objet de la question est de montrer que α est un générateur de $\mathbb{L}^*$.
   (a) Montrer que $\alpha^{13} = -1$ si et seulement si P divise $(X-1)^4X + 1$ dans $\mathbb{F}_3[X]$.
   (b) Conclure.
4. Le polynôme $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ a-t-il une racine dans $\mathbb{L}$?

2 Corps finis 2

Soit $P = X^2 + X + 2 \in \mathbb{F}_5[X]$. On note $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5[X]/(P)$ et α la classe de X dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps. Quelle est sa caractéristique ? Son cardinal ? En donner une base comme $\mathbb{F}_5$-espace vectoriel.
2. Exprimer toutes les puissances distinctes de α dans cette base. Quel est l'ordre de α dans $\mathbb{K}^*$?
3. Montrer que $\mathbb{F}_5 = \left\{x \in \mathbb{K} / x = x^5\right\}$.
4. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{F}_5$. Montrer que le polynôme $P_a = (X-a)(X-a^5)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.
5. Montrer que si $Q \in \mathbb{F}_5[X]$ alors a est racine de Q si et seulement si P_a divise Q.
6. Factoriser le polynôme $X^25 - X$ dans $\mathbb{F}_5[X]$ et donner les racines dans $\mathbb{K}$ de chaque facteur.

3 Corps finis 3

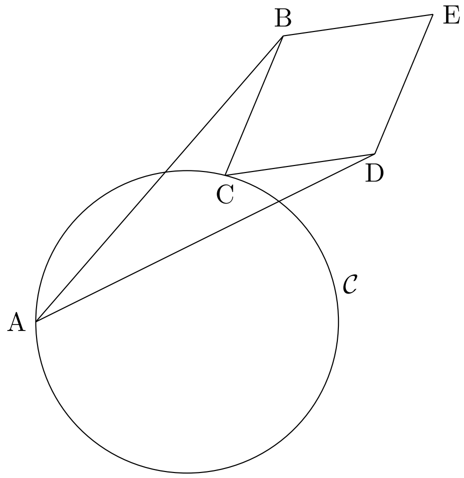
Quels sont les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$?

4 Groupes de petit cardinal

Quelles sont les classes d'isomorphisme de groupes d'ordre inférieur ou égal à 8 ?

5 Inverseur

On considère la figure suivante, avec $AB = AD$ et $BC = CD = DE = EB$ des longueurs fixées.



Montrer que, lorsque le point C parcours le cercle $\mathcal{C}$ (le point A est fixé, et les points B, C, D, E bougent en conséquence), le point E reste sur une même droite.

6 Équations diophantiennes

1. Trouver tous les entiers a, b, c vérifiant $1 < a < b < c$ et tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc - 1$.
2. Résoudre $3x^2 - y^4 = x^3 - 8y^3 + 50$ avec x et y entiers positifs.

7 Diviseurs de 0

Soit A un anneau commutatif unitaire, qui contient exactement $n > 0$ diviseurs de 0. Montrer que A a au plus $(n+1)^2$ éléments. Donner un exemple où il y a égalité.

8 Anneaux principaux

Soit A un anneau commutatif intègre. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des idéaux non nuls de A par : I est équivalent à J si et seulement s'il existe a et b non nuls dans A tels que $aI = bJ$.

Vérifier que c'est bien une relation d'équivalence. Montrer que A est principal si et seulement s'il y a une seule classe d'idéaux non nuls pour cette relation d'équivalence.