

TD agreg

Lionel Fourquaux

6 décembre 2010

1 Groupes cycliques

Montrer que si $m > 2$ et $n > 2$ sont deux entiers premiers entre eux, le groupe $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^*$ n'est pas cyclique.

2 Ordre des éléments d'un groupe

Soit G un groupe abélien. On suppose que G contient un élément x d'ordre m et un élément y d'ordre n . Donner un élément de G qui soit d'ordre $\text{ppcm}(m, n)$.

3 Ordre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 1

Déterminer tous les entiers $n > 1$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$.

4 Ordre dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 2

Montrer qu'il n'y a pas d'entier impair $n > 1$ tel que $a^{n-1} \equiv -1 \pmod{n}$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$.

5 Topologie du plan projectif réel

Montrer que $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à

$$S^2 / r \sim -r$$

(où S^2 désigne la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans \mathbb{R}^3).

Montrer que la calotte polaire $x \geq \frac{1}{2}$ est homéomorphe à un disque.

Posons

$$M = S^1 \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[/ (x, y) \sim (-x, -y).$$

Montrer que $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ s'obtient en collant un disque le long du bord de M .

Montrer en considérant la projection sur la première composante que l'on peut construire une application continue p de M sur S^1 telle que l'image inverse d'un point soit homéomorphe à $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.

Montrer que le complémentaire de $S^1 \times \{0\} / (x, 0) \sim (-x, 0)$ dans M est connexe.

Soit $x \in S^1$. Montrer que $M \setminus p^{-1}(x)$ est homéomorphe à un rectangle. En déduire que M est un ruban de Möbius, et que $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ s'obtient en collant un disque le long du bord d'un ruban de Möbius.

6 Un exercice classique...

Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et 6 d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Survient alors un naufrage, et seuls 6 pirates, le cuisinier et le trésor sont sauvés. Le partage laisserait 5 pièces d'or à ce dernier. Il décide alors d'empoisonner les autres survivants. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier ?