TD Polynômes à une variable

1 Théorème de Fermat pour les polynômes

Dès que $n \geq 3$, il n'existe pas de polynômes non constants $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble tels que $P^n + Q^n = R^n$.

1) Pouvez vous trouver des polynômes non constants P, Q, R premiers entre eux tels que $P^2+Q^2 = R^2$?

On suppose maintenant $n \geq 3$. On va montrer un résultat plus fort que le théorème de Fermat pour les polynômes.

(*) *Il n'existe pas de polynômes non constants P, Q, R de $\mathbb{C}[X]$ et de complexes non nuls a, b, c tels que $aP^n + bQ^n + cR^n = 0$.*

2) Montrer (*) entraîne Fermat-polynômes.

Pour montrer (*), on va raisonner par l'absurde en supposant l'existence de P, Q, R, a, b, c comme ci-dessus vérifiant $aP^n+bQ^n+cR^n = 0$. On peut alors choisir une telle solution avec $\deg P \leq \deg Q \leq \deg R$ qui soit minimale du point de vue des degrés, dans le sens suivant : toute autre solution fait intervenir un polynôme de degré $\geq \deg R$.

3) Montrer que P, Q, R sont premiers entre eux deux à deux.

4) Soit u un nombre complexe tel que $u^n = -c/b$ et soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que

$$Q^n + \frac{c}{b} R^n = \prod_{k=0}^{n-1} (Q - u\omega^k R) .$$

Dans ce qui suit, on pose $A_k = Q - u\omega^k R$ pour $k = 0, \ldots, n-1$.

5) Montrez que les A_k sont premiers entre eux deux à deux.

6) En déduire qu'il existe des polynômes $B_k \in \mathbb{C}[X]$ pour $k = 0, \ldots, n-1$ tels que $A_k = B_k^n$.

7) Montrer que $(\omega^2 - \omega)B_0^n + (1 - \omega^2)B_1^n + (\omega - 1)B_2^n = 0$.

8) Conclure.

2 Polynômes à valeurs entières

On définit les polynômes $\binom{X}{k} \in \mathbb{R}[X]$ pour $k \in \mathbb{N}$ par $\binom{X}{0} = 1$, $\binom{X}{1} = X$ et $\binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 2$.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$, et on définit par récurrence $\Delta^k P = \Delta(\Delta^{k-1} P)$ pour $k \geq 2$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k}$ est bien le coefficient binomial (avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k$).
2. Vérifier que pour tout polynôme non constant P, $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$. En déduire que $\deg(P) \leq k$ si et seulement si $\Delta^{k+1} P = 0$.
3. Vérifier que si $\Delta P = \Delta Q$ et $P(0) = Q(0)$, alors $P = Q$.
4. Vérifier que $\Delta \binom{X}{k} = \binom{X}{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

5. Vérifier que $\Delta(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \Delta P_i$.
6. Etablir par récurrence sur le degré de P que pour tout polynôme P de degré $\leq k$, on a

$$P(X) = P(0) + \Delta P(0)\binom{X}{1} + \Delta^2 P(0)\binom{X}{2} + \cdots + \Delta^k P(0)\binom{X}{k}.$$

7. Dans le tableau suivant, chaque nombre est la différence entre celui au-dessus à droite et celui juste au-dessus.

-4	0	1	1	2	6	15
4	1	0	1	4	9	
-3	-1	1	3	5		
2	2	2	2			
0	0	0				

   Expliquer pourquoi la première ligne de ce tableau est formée des valeurs d'un polynôme P du troisième degré en 0, 1, 2, ..., 6. Que valent $P(7)$, $P(8)$? Exprimer P en fonction des $\binom{X}{k}$.
8. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie que $P(c) \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $c \in \mathbb{Z}$ si et seulement s'il est combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes $\binom{X}{k}$. Est-ce qu'une telle écriture est unique ?