Université de Rennes 1
Année 2012/2013

Préparation à l'agrégation

Préparation à l'écrit-Feuille d'exercices 1

1 - (Ensemble résoltant d'un générateur d'une algèbre de Banach) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire sur $\mathbf{C}$. On suppose qu'il existe $x \in \mathcal{A}$ qui engendre $\mathcal{A}$, c-à-d tel que la sous-algèbre $\{P(x) : P \in \mathbf{C}[X]\}$ soit dense dans $\mathcal{A}$.
(i) Montrer que $\mathcal{A}$ est commutative.

Soit λ un nombre complexe dans l'ensemble résolvant $\rho(x)$ de x, c-à-d $\lambda \notin \sigma(x)$, où $\sigma(x)$ est le spectre de x.
(ii) Soit $(P_n)_n$ une suite dans $\mathbf{C}[X]$ telle que $\lim_n P_n(x) = (x - \lambda e)^{-1}$. Montrer que $\lim_n P_n(z) = (z - \lambda)^{-1}$ uniformément sur $\rho(x)$.
(iii) Déduire de (ii) que $\rho(x)$ est une partie connexe de $\mathbf{C}$.

2 - (Equation résolvante) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire sur $\mathbf{C}$ et G son groupe des éléments inversibles. Soit $x \in \mathcal{A}$ et $\rho(x)$ son ensemble résolvant. On définit l'application résolvante $R_x : \rho(x) \to G$ par $R_x(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$.
(i) Montrer que

$$R_x(\lambda_1) - R_x(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)R_x(\lambda_1)R_x(\lambda_2).$$

(ii) Soit $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$. Déduire de (i) que la fonction

$$f : \rho(x) \to \mathbf{C}, \qquad f(\lambda) = \varphi((x - \lambda e)^{-1}).$$

est holomorphe.

3 -(Spectre d'un opérateur de multiplication)

Soit X un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité μ. Soit $\varphi : X \to \overline{\mathbf{R}}$ une fonction mesurable bornée μ-presque partout. On considère l'opérateur linéaire $T : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ défini par $Tf(x) = \varphi(x)f(x)$ pour $f \in L^2(X, \mu)$ et $x \in X$.
(i) Montrer que T est borné (c-à-d continu) et auto-adjoint.
(ii) Montrer que $\sigma(T)$ est l'ensemble des valeurs essentielles de φ, c-à-d l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{R}$ tels que

$$\mu(\varphi^{-1}(]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[)) \neq 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

(iii) Soit $p \in [1, +\infty]$. Le résultat (ii) est-il encore valable pour l'opérateur $T_p : L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$ défini par la même formule?