

Préparation à l'écrit-Feuille d'exercices 2

1 - (Spectre d'un élément relativement à une sous-algèbre) Soit $\mathcal{A} = C(S^1)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues f sur le cercle unité $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ à valeurs complexes, munie de la norme $\|f\|_\infty$. On considère la sous-algèbre unitaire \mathcal{B} de \mathcal{A} formée des fonctions $f \in C(S^1)$ pour lesquelles il existe $F \in C(\overline{D})$ telle que $F|_{S^1} = f$ et telle que $F|_D$ est holomorphe, où $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ est le disque unité.

(i) Montrer que \mathcal{B} est fermée dans \mathcal{A} et qu'elle est donc une algèbre de Banach unitaire.

Soit f_0 la fonction dans \mathcal{B} définie par $f_0(z) = z$. On note $\sigma_{\mathcal{A}}(f_0)$ et $\sigma_{\mathcal{B}}(f_0)$ le spectre de f_0 relativement à \mathcal{A} et à \mathcal{B} , respectivement.

(ii) Déterminer $\sigma_{\mathcal{A}}(f_0)$.

(iii) Déterminer $\sigma_{\mathcal{B}}(f_0)$.

(iv) Vérifier qu'on a bien $r_{\mathcal{A}}(f_0) = r_{\mathcal{B}}(f_0)$, où $r_{\mathcal{A}}(f_0)$ et $r_{\mathcal{B}}(f_0)$ est le rayon spectral de f_0 relativement à \mathcal{A} et à \mathcal{B} , respectivement.

2 - (Unitarisation d'une algèbre de Banach) Soit \mathcal{A} une algèbre sur \mathbf{C} . On considère l'espace vectoriel somme

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbf{C},$$

muni des opérations usuelles. On munit $\tilde{\mathcal{A}}$ de la multiplication

$$(a, \lambda)(b, \beta) = (ab + \lambda b + \beta a, \lambda\beta) \quad \text{pour tout } (a, b) \in \mathcal{A}^2, (\lambda, \beta) \in \mathbf{C}^2.$$

(i) Montrer que $\tilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre unitaire d'élément unité $e = (0, 1)$.

(ii) Montrer que $i : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ est un homomorphisme injectif d'algèbres et que $i(\mathcal{A})$ est un idéal bilatère de $\tilde{\mathcal{A}}$.

On identifiera dans la suite \mathcal{A} avec $i(\mathcal{A})$, qui est un l'idéal bilatère de codimension 1 de $\tilde{\mathcal{A}}$, et on notera $a + \lambda e$ un élément générique de $\tilde{\mathcal{A}}$, avec $a \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$.

On suppose maintenant que \mathcal{A} est une algèbre de Banach. On munit $\tilde{\mathcal{A}}$ de la norme

$$\|a + \lambda e\| = \|a\| + |\lambda| \quad \text{pour tous } a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbf{C}.$$

(iii) Montrer que $\tilde{\mathcal{A}}$ est une algèbre de Banach.

3 - (Algèbre de Banach quotient) Soit \mathcal{A} une algèbre de Banach et I un idéal bilatère fermé de \mathcal{A} . Soit \mathcal{A}/I l'algèbre quotient. On note $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/I$ l'application quotient. On munit \mathcal{A}/I de la norme quotient

$$\|\pi(a)\| = \inf\{\|a + x\| \mid x \in I\} \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

Montrer que \mathcal{A}/I est une algèbre de Banach.

3 - (Caractères de $C(K)$) Soit K un espace compact et soit $\mathcal{A} = C(K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues f sur K à valeurs complexes, munie de la norme $\|f\|_\infty$.

Chaque point $x \in K$ définit un caractère φ_x de \mathcal{A} par $\varphi_x(f) = f(x)$ pour tout $f \in C(K)$. On se propose de montrer que tout caractère de \mathcal{A} est de cette forme.

Soit donc $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}$ un caractère de \mathcal{A} . Supposons, par l'absurde, que $\varphi \notin \{\varphi_x \mid x \in K\}$.

(i) Montrer que, pour tout $x \in K$, il existe $f_x \in C(K)$ telle que $\varphi(f_x) = 0$ et $f_x(x) \neq 0$.

(ii) Montrer qu'il existe un nombre fini de points x_1, \dots, x_n de K avec la propriété: pour tout $y \in K$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_{x_i}(y) \neq 0$.

On pose $g := |f_{x_1}|^2 + \dots + |f_{x_n}|^2$.

(iii) Montrer que $\varphi(g) = 0$ et que g est inversible dans \mathcal{A} .

(iv) Conclure.