TD - Groupes

1. Soit G un groupe et H un sous groupe de G. On pose
$$N(G) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H \ .$$
Montrer que $N(G)$ est un sous groupe de G contenant H, et que c'est le plus grand sous-groupe de G contenant H dans lequel H est distingué (on l'appelle le normalisateur de G).
Soit $\mathrm{GA}(\mathbb{R})$ le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}$, c.-à-d. des applications $x \mapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit H le sous-groupe des translations $x \mapsto x + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Calculer le normalisateur de H. Montrer qu'il existe des éléments $g \in \mathrm{GA}(\mathbb{R})$ tels que $gHg^{-1} \subset H$ mais que g ne soit pas dans le normalisateur de H.

2. Soient p un nombre premier, r un entier ≥ 1. Soit G un groupe fini de cardinal p^r.
   (a) Montrer que le centre de G est différent de 1.
   (b) Montrer que G contient un sous-groupe d'ordre p.
   (c) Sous M un sous-groupe strict maximal de G. Montrer que M est distingué dans G et que G/M est cyclique d'ordre p (on pourra considérer le normalisateur de H, et raisonner par récurrence sur r).
   (d) On désigne par Φ l'intersection des sous-groupes stricts maximaux de G. Montrer que Φ est distingué dans G et que G/Φ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ pour un certain entier $d \geq 1$.
   (e) Montrer que le groupe $H = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \ z^{p^n} = 1\}$ n'a aucun sous-groupe strict maximal.

3. Soit G un groupe. On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$.
   (a) Montrer que $D(G)$ est distingué dans G et que $G/D(G)$ est abélien. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $D(G) \subset H$ si et seulement si H est distingué dans G et G/H est abélien.

   On dit que G est **résoluble** lorsqu'il existe une suite décroissante de sous-groupes
   $$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{r-1} \supset H_r = \{1\}$$
   telle que pour tout $i = 1, \ldots, r$, H_i soit distingué dans H_{i-1} et H_{i-1}/H_i soit abélien.

   (b) On pose $G_0 = G$ et on définit la suite (G_i) par récurrence en posant $G_i = D(G_{i-1})$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que G est résoluble si et seulement s'il existe $r \geq 0$ tel que $G_r = \{1\}$.

(c) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que si G est résoluble alors H l'est aussi.
Supposons H distingué dans G. Montrer que G est résoluble si et seulement si H et G/H le sont.

(d) Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ est résoluble, et que $\mathfrak{S}_n$ ne l'est pas pour $n \geq 5$.

(e) Soit $n \geq 1$ et K un corps. Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ formé des matrices triangulaires supérieures est résoluble.

(f) Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^r. Montrer que G est résoluble.

4. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que, s'il y a dans G un chemin continu de A à B et un chemin continu de C à D, alors il y a dans G un chemin continu de AC à BD.

   (b) Montrer que l'ensemble des éléments de G qui peuvent être reliés à I_n par un chemin continu dans G est un sous-groupe distingué de G.

5. (a) Montrer que l'application $(P, A) \mapsto PAP^*$ définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel réel H des matrices hermitiennes 2×2.

   (b) Montrer que $A \mapsto \det(A)$ est une forme quadratique sur H de signature $(1, 3)$.

   (c) Utiliser (a) et (b) pour définir un homomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to O_{1,3}$ dont le noyau est $\{\pm I_2\}$.