Algèbre linéaire

Espaces vectoriels, endomorphismes

Exercice 1.

1. Montrer qu'une famille $(g_1, \dots, g_n)$ de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est libre si et seulement s'il existe des réels $r_1, \dots, r_n$ tels que $\det\big((g_i(r_j))_{i,j}\big) \neq 0$.
2. Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Pour $a \in \mathbf{R}$, on note φ_a la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\varphi_a(x) = f(a, x)$ et ψ_a celle définie par $\psi_a(x) = f(x, a)$. Soit $E = \mathrm{Vect}(\{\varphi_a \mid a \in \mathbf{R}\})$ et $F = \mathrm{Vect}(\{\psi_a \mid a \in \mathbf{R}\})$.
   Montrer que E est de dimension finie si et seulement si F est de dimension finie, et qu'alors $\dim E = \dim F$.

Exercice 2. Soient u et v des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie tels que $u \circ v = u + v$. Montrer que u et v commutent.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$.

1. Montrer que si $u \in \mathrm{End}(E)$ est un projecteur, alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{tr}(u)$.
2. Soient $u_1, \dots, u_k$ des endomorphismes de E tels que $u_1 + \cdots + u_k = \mathrm{Id}_E$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) $u_i \circ u_j = 0$, pour tous $i \neq j$.
   (b) $u_i \circ u_i = u_i$ pour $i = 1, \dots, k$.
   (c) $\mathrm{rg}(u_1) + \cdots + \mathrm{rg}(u_k) = n$.

Exercice 4. Soit f une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(K)$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices A, $B \in \mathrm{M}_n(K)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \mathrm{tr}$.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est inversible et $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel de dimension nq et f un endomorphisme de E tel que $f^q = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = (q-1)n$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^{q-1}) = n$.
(On pourra appliquer le théorème du rang aux endomorphismes f, $f_{|\mathrm{Im} f}, \dots, f_{|\mathrm{Im} f^{q-1}}$.)

Déterminants

Exercice 7. Soient A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que le degré du polynôme $P(X) = \det(A + XB)$ est inférieur ou égal au rang de B.

Exercice 8 (Déterminant circulant)**.** Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $w = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{n-2} & w^{n-1} \\ & \vdots & \cdots & \vdots & \\ & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 1 & w^{n-1} & \cdots & (w^{n-1})^{n-2} & (w^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer AM et en déduire $\det A$.
(On pourra introduire le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.

Exercice 9. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ telle que $a_{i,j} = |i - j|$. Calculer $\det(A)$.

Polynômes d'endomorphismes, réduction

Exercice 10. Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $P \in K[X]$ son polynôme minimal. On note $P = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_\ell^{\alpha_\ell}$ la décomposition de P en produit de facteurs unitaires irréductibles sur K.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $M_x \in K[X]$ tel que $M_x(u)(x) = 0$ et que M_x divise tout polynôme $A \in K[X]$ tel que $A(u)(x) = 0$.
2. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$, il existe $a_i \in E$ tel que $M_{a_i} = Q_i^{\alpha_i}$.
   (On pourra écrire $P = Q_i^{\alpha_i} R$ et chercher a_i dans l'image de $R(u)$).
3. Soient $x, y \in E$ tels que M_x et M_y sont premiers entre eux. Montrer que $M_{x+y} = M_x M_y$.
4. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $M_a = P$.
5. En déduire (sans Cayley-Hamilton) que $\deg P \leqslant \dim E$.

Exercice 11. Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si, pour tout $a \in \mathbf{C}$, $\mathrm{rg}(u - a\mathrm{Id}) = \mathrm{rg}((u - a\mathrm{Id})^2)$.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Caractériser les endomorphismes u de E tels que tout sous-espace vectoriel de E admette un supplémentaire stable par u.

Exercice 13. On suppose que les matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ commutent. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
(On pourra calculer $P(M)$ où P est un polynôme.)

Exercice 14. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(a) Il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle telle que $AP = PB$.

(b) A et B ont une valeur propre commune.

(Pour (a) $\Rightarrow$ (b), raisonner par l'absurde en considérant les polynômes annulateurs minimaux. Pour (b) $\Rightarrow$ (a), se ramener au cas d'une valeur propre commune nulle.)

Dualité

Exercice 15. Soient $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in K^n$ et $M \in \mathrm{M}_n(K)$. Montrer que l'hyperplan vectoriel d'équation $\ell_1 x_1 + \cdots + \ell_n x_n = 0$ est stable par la matrice M si et seulement si $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est un vecteur propre pour la matrice transposée ${}^{\mathrm{t}}M$.

Décrire tous les sous-espaces stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que n est pair et que u n'admet pas d'hyperplan stable.