Anneaux, arithmétique

Anneaux

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif unitaire. On dit que $x \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de A est un idéal de A.
2. Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.
3. Montrer que le quotient $A/\mathcal{N}$ n'a pas d'élément nilpotent non nul.
4. Trouver un exemple d'anneau A avec deux éléments x et y nilpotents tels que $x + y$ n'est pas nilpotent.
5. Montrer que A n'a pas d'élément nilpotent non nul si et seulement si tout élément inversible de $A[X]$ est constant.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif unitaire, qui contient exactement $n > 0$ diviseurs de 0 non nuls. Montrer que A a au plus $(n + 1)^2$ éléments. Donner un exemple où il y a égalité.

Exercice 3. 1. Soit A un anneau euclidien (qui n'est pas un corps). Montrer qu'il existe un $x \in A$, non nul et non inversible, tel que la projection canonique $A \twoheadrightarrow A/(x)$ induise une surjection $A^\times \cup \{0\} \twoheadrightarrow A/(x)$.

2. Montrer que $A/(x)$ est alors un corps.
3. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$, pour un entier $N < 0$ sans facteur carré. Déterminer $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]^\times$.
4. Si $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{N}] - \{0\}$, calculer le cardinal de $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]/(x)$.
5. En déduire que si $N < -3$ alors l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{N}]$ n'est pas euclidien.
6. Qu'en est-il pour $N = -1$? pour $N = -2$?

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif intègre. Soit I l'idéal de $A[X, Y]$ engendré par $X + Y$.

1. Montrer que $A[X, Y]/I$ est isomorphe à l'anneau $A[X]$.
2. L'idéal I est-il premier ? Est-il maximal ?

Séries formelles

Exercice 5. Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ on définit

$$S(n, d) = \#\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N} \mid k_1 + \cdots + k_n = d\}.$$

1. Démontrer l'identité suivante, dans $\mathbf{Q}[[T]]$:

$$\sum_{d=0}^{\infty} S(n, d)T^d = \frac{1}{(1 - T)^n}.$$

2. En déduire que $S(n, d) = \binom{n+d-1}{d}$.

Exercice 6. On souhaite déterminer le nombre q_n de façons de regrouper les éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour effectuer le produit non associatif de a_1, a_2,…et a_n.
Par exemple, $q_1 = q_2 = 1$. Pour $n = 3$, on peut avoir $a_1 * (a_2 * a_3)$ ou $(a_1 * a_2) * a_3$. Donc $q_3 = 2$.

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$,

$$q_n = \sum_{j=1}^{n-1} q_j q_{n-j}.$$

2. Soit $f(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j X^j \in \mathbf{C}[[X]]$. Calculer $f(X)^2$.
3. En déduire $f(X)$, puis q_n pour tout $n \geqslant 1$.