

**Exercice 1.** Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $f_\epsilon$  la fonction sur  $\mathbf{R}$  définie par  $f_\epsilon(x) = x/(x^2 + \epsilon^2)$ . Montrer que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{f_\epsilon} = \text{vp}(1/x)$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ , où  $\text{vp}(1/x)$  est la distribution tempérée définie dans la feuille de TD 1, Exercice 2.

**Exercice 2. (Dérivée de  $\text{vp}(1/x)$ )** Calculer la dérivée dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$  de la distribution  $\text{vp}(1/x)$ .

**Exercice 3. (Valeurs de  $1/z$  sur l'axe réel)** Pour  $\epsilon > 0$ , on considère les fonctions continues et bornées  $f_\epsilon^+$  et  $f_\epsilon^-$  définies sur  $\mathbf{R}$  par  $f_\epsilon^+(x) = 1/(x - i\epsilon)$  et  $f_\epsilon^-(x) = 1/(x + i\epsilon)$ .

Montrer que les limites  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{f_\epsilon^+}$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{f_\epsilon^-}$  existent dans  $\mathcal{S}'$  et, qu'en notant ces limites par  $\frac{1}{x+i0}$  et  $\frac{1}{x-i0}$ , on a

$$\frac{1}{x+i0} = \text{vp}(1/x) - i\pi\delta \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-i0} = \text{vp}(1/x) + i\pi\delta.$$

**Exercice 4. (Formule des sauts pour un demi-espace)** Pour  $n \geq 2$ , soit  $D = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+$  le demi-espace  $\{x_n \geq 0\}$ . Soit  $f(x) = f(x', x_n)$  une fonction dans  $C^1(D)$  telle que  $|f|$  soit bornée par un polynôme. Soit  $F$  la fonction sur  $\mathbf{R}^n$  qui est égale à  $f$  sur  $D$  et nulle ailleurs. On souhaite calculer les dérivées  $\partial/\partial x_i(F)$  au sens des distributions.

(i) Soit  $i \neq n$ . Montrer que  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = T_{\{\partial/\partial x_i(F)\}}$ , où  $\{\partial/\partial x_i(F)\}$  désigne la fonction qui est égale à  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sur  $D$  et 0 ailleurs.

(ii) Montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = T_{\{\partial/\partial x_n(F)\}} + f(x', 0)\delta_{\{x_n=0\}},$$

où  $f(x', 0)\delta_{\{x_n=0\}}$  est la distribution dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  définie par

$$\langle f(x', 0)\delta_{\{x_n=0\}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(x', 0)\varphi(x', 0)dx', \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

(iii) Calculer  $\Delta F$  au sens des distributions quand  $f$  est  $C^2$  sur  $D$ . En déduire une formule ("formule de Green") pour  $\int_D (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)dx$  pour  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ .

**Exercice 5.** Soit  $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$  tel que  $P(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ . Soit  $P(D)$  l'opérateur différentiel associé à  $P$ . Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  tel que  $P(D)T = 0$ . Montrer que  $T = T_f$  pour une fonction polynomiale  $f$  sur  $\mathbf{R}^n$ .

*Indication:* On utilisera, sans le démontrer, le fait qu'une distribution dont le support est égal à  $\{0\}$  est une combinaison linéaire de dérivées de la distribution de Dirac  $\delta$ .

**Exercice 6. (Transformée de Fourier de  $\text{vp}(1/x)$ )** Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $g_\epsilon$  la fonction sur  $\mathbf{R}$  définie par  $g_\epsilon(x) = -e^{\epsilon x}$  si  $x < 0$  et  $g_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x}$  si  $x \geq 0$ .

(i) Montrer que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{g_\epsilon} = T_{\text{sgn}}$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ , où  $\text{sgn}$  est la fonction signe.

(ii) Calculer la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(g_\epsilon)$  de  $g_\epsilon$ .

(iii) Déterminer  $\mathcal{F}(\text{vp}(1/x))$  en utilisant (ii) et l'exercice 1.

**Exercice 7. (Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside)** Calculer la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(H)$  de la fonction de Heaviside  $H$ .

*Indication:* On pourra utiliser l'exercice 6.

**Exercice 8. (Transformée de Fourier de  $\text{vp}(1/x)$ -bis)** Calculer la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(\text{vp}(1/x))$  de  $\text{vp}(1/x)$ , en utilisant le fait que  $x\text{vp}(1/x) = 1$ .