Université de Rennes 1
Année 2013/2014

Agrégation–Préparation à l'écrit-TD1

Dans toute la suite $\mathbb{F}_q$ dénote le corps fini à q éléments.

1 - Montrer que $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. (*Indication:* Faire opérer $GL_2(\mathbb{F}_2)$ sur $\mathbb{F}_2^2$.)
2 - Soient $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$ et $E = \mathbb{F}_3^2$;
(i) Construire, au moyen des 4 droites vectorielles D_1, D_2, D_3, D_4 de E, un homomorphisme surjectif $\epsilon : GL_2(\mathbb{F}_3) \to \mathfrak{S}_4$.
(ii) Montrer que ϵ induit un isomorphisme entre $PSL_2(\mathbb{F}_3)$ et le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
(iii) En déduire que $SL_2(\mathbb{F}_3)$ n'est pas parfait (Un groupe G est parfait s'il coïncide avec le sous-groupe $[G, G]$ engendé par les commutateurs.)
3 - Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension n. Pour un entier m avec $0 \leq m \leq n$, on note X_m l'ensemble des m-tuplets $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ formés de m vecteurs linéairement indépendants.
(i) Calculer $|X_m|$. En déduire $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$.
(ii) Combien y-a-t-il de droites vectorielles dans E?
(iii) Soit $G_{n,m}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension m. Trouver une formule pour $|G_{n,m}|$. (*Indication:* $GL_n(\mathbb{F}_q)$ opère transitivement sur $G_{n,m}$.)
4 - Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ de la topologie standard.
(i) Montrer que $GL_n(\mathbb{Q})$ est dense $GL_n(\mathbb{R})$ et que $SL_n(\mathbb{Q})$ est dense $SL_n(\mathbb{R})$.
(ii) Montrer que $GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.
5 - Soit $n \geq 1$ un entier et $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$. Pour un nombre premier p, on considère l'homomorphisme $\varphi_p : \Gamma \to SL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ induit par la réduction modulo p, i.e. $\varphi_p((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}) = (\overline{a}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $\overline{a}$ désigne la classe de $a \in \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(i) Montrer que φ_p est surjectif.
(ii) On note Γ_p le noyau de φ_p. Quel est l'indice de Γ_p dans Γ?
(iii) On suppose que $p \geq 3$. Montrer que Γ_p ne possède pas d'élément d'ordre fini distinct de l'identité.
(iv) En déduire que Γ ne possède, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes finis.
6 - Soit $n \geq 2$, et soit $a = (a_1, \ldots, a_n)^t \in \mathbb{Z}^n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une matrice $A \in SL_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est a.
(ii) $\text{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.