TD : Compacité

A. Utilisation de la propriété de Borel-Lebesgue. Pour un espace métrique, la propriété de Borel-Lebesgue : "*De tout recouvement d'un compact par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini*", est équivalente à la propriété de Bolzano-Weierstrass : "*Toute suite a une sous-suite convergente*".

1. [Mneimé-Testard] L'application exponentielle réalise un homéomorphisme de l'ensemble des endomorphismes hermitiens de $\mathbb{C}^n$ sur l'ensemble des endomorphismes hermitiens définis positifs de $\mathbb{C}^n$.

2. Exercice. Soit V un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^n$ admettant une trajectoire compacte. Montrez que la solution associée est périodique.

3. Exercice. [Gourdon, Ex. 1, p.31] Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue telle que $f^{-1}(K)$ est compact, pour tout compact K de F.

a. Montrez que f envoie tout fermé de E sur un fermé de F. (On dit f fermée.) Existe-t-il des applications qui ne sont pas fermées ?

b. Notons $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrez que l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dont toutes les racines sont réelles est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

B. Fonctions continues définies sur un compact *"L'image d'un compact par une application continue f, à valeurs dans un espace métrique, est compacte. En particulier, si f est à valeurs réelles, elle est bornée et atteint ses bornes."*

4. Exercice [Berger] **a.** Pourqoi la sphère unité S_q d'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, définie positive, est-elle compacte ?

b. Soit q' une autre forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, quelconque, d'endomorphisme symétrique associé M. Utilisez le théorème des extremas liés pour montrer l'existence d'un point $a \in S_q$, vecteur propre de M, et dont l'espace q-orthogonal est stable par M. En déduire le théorème de diagonalisation simultanée suivant. *Etant donnés une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ définie positive, et une forme quadratique quelconque q' sur $\mathbb{R}^n$, il existe une base q-orthonormée dans laquelle la matrice de q' (ou M) est diagonale.*

5. Exercice. Sous-groupes compacts de $GL(\mathbb{R}^d)$. Soit $\mathbf{G}$ un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^d)$. On souhaite montrer l'existence d'un endomorphisme g inversible de $\mathbb{R}^d$, tel que $g^{-1}\mathbf{G}g$ est un sous-groupe des isométries (euclidiennes) de $\mathbb{R}^d$. On le démontre ici en établissant le lemme suivant.

Lemme. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^n)$, et C un convexe d'intérieur non vide, stable par $\mathcal{G}$. Il existe alors un point de C laissé stable par tous les éléments de $\mathcal{G}$.*

a. Supposons un instant le lemme démontré, et notons $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^d$, et $\mathcal{S}_d^{>0}$ l'ensemble de ceux qui sont définis positifs. Montrez que l'image de **G** par l'application qui à g associe l'endomorphisme de $\mathcal{S}_d$: $S \mapsto g^t S g$, est un sous-groupe compact $\mathcal{G}$ de $GL(\mathcal{S}_d)$. Déduire du lemme le résultat attendu.

b. *i)* Il nous reste à démontrer le lemme. L'intérieur de C étant non vide, on peut trouver $n+1$ points $a_0, \dots, a_n$ formant un repère affine de $\mathbb{R}^n$. Montrez que l'enveloppe convexe de $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{G}(a_i)$ est un convexe compact d'intérieur non vide, stable par $\mathcal{G}$. On la note $\widetilde{C}$.

ii) Notons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrez que tous les éléments de $\mathcal{G}$ laissent stable le centre de gravité

$$y = \frac{1}{\lambda(\widetilde{C})} \int_{\widetilde{C}} x \lambda(dx)$$

de $\widetilde{C}$. La conclusion provient de ce que y appartient à $\widetilde{C} \subset C$. Voyez-vous pourquoi ?

6. [Queffelec, p. 188] Tout polynôme à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

7. Exercice. A propos du groupe des isométries d'un compact de $\mathbb{R}^d$. Etant donné un compact K de $\mathbb{R}^d$, on note Isom_K l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^d$ envoyant K dans K.

a. Montrez qu'une telle isométrie doit vérifier $f(K) = K$; il s'ensuit que Isom_K est un groupe.

b. On souhaite montrer qu'il existe un point p de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathrm{Isom}_K \subset \mathrm{Isom}_{\{p\}}$, ce qu'on résume par la formule : "*Les compacts de $\mathbb{R}^d$ dont le groupe d'isométrie est le plus grand sont les réunions de sphères*".

i) L'argument repose sur le lemme suivant, à démontrer par contradiction.

Lemme. *On définit une application continue en posant $g(m) = \max_{k \in K} \|k - m\|$, pour tout $m \in \mathbb{R}^d$.*

ii) Montrez que g réalise son minimum r en un unique point p, et que la boule fermée de centre p et de rayon r est la plus petite boule fermée contenant K. En déduire que toutes les éléments $f \in \mathrm{Isom}_K$ laissent p stable.

C. Espace métriques compacts

Rappelons la caractérisation fondamentale. "*Un espace métrique K est compact si et seulement si il est précompact et complet*", et le théorème d'Ascoli-Arzela : "*Les ensembles relativement compacts de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sont les familles équicontinues $\mathcal{F}$ telles que l'ensemble $\{f(m) ; f \in \mathcal{F}\}$ est borné, pour un point $m \in K$ (donc pour tous !).*"

8. Exercice On munit $E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ de la norme infinie. Soit $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue, et $T : E \to E$ définie par la formule

$$T(f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy.$$

Montrez que l'application T est compacte (c'est-à-dire, que l'image par T de la boule unité est pré-compacte).

9. Alternative de Fredholm. [Brezis, théorème VI.6.c, p. 91-93] Etant donné un nombre complexe λ non nul et $g \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, on a l'alternative suivante à propos de l'équation

$$Tf - \lambda f = g.$$

i) Si λ n'est pas dans le spectre de T alors l'équation a une unique solution.

ii) si λ est dans le spectre, il existe un sous-espace fermé F de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ de co-dimension finie, non trivial, tel que si $g \notin F$ alors l'équation n'a pas de solution, et si $g \in F$ alors l'ensemble des solutions forme un sous-espace vectoriel non trivial de dimension finie.

9. Exercice [Queffelec, Ex. 2, p. 81] Soit $1 \leqslant p < \infty$. Montrez que les compacts de $\ell^p(\mathbb{N})$ sont exactement les parties K de $\ell^p(\mathbb{N})$ qui sont équi-intégrables, fermées et bornées. (Rappelons que K est dite équi-intégrable s'il existe pour tout $\epsilon > 0$ un entier N_ϵ tel que $\sum_{n \geqslant N_\epsilon} |a_n|^p \leqslant \epsilon$, quel que soit $a \in K$.)

10. [Brezis] Soit U un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^d$. Les compacts de $\mathbb{L}^p(U)$, pour $1 \leqslant p < \infty$, sont donnés par un théorème de Kolmogorov.

11. Théorème de Schauder. [Gonnord-Tosel] On pourra aussi aller voir la démonstration de ce théorème de point fixe faite a partir du théorème du point fixe de Brouwer.