Sur les transformées de Fourier et quelques applications

---

1 Transformée de Fourier

1.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 1 *: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}$, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, par :*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i<x,\xi>} \mathrm{d}x$$

Remarque 1 *:*

- *Il y a de nombreuses conventions différentes :*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi<x,\xi>} \mathrm{d}x, \ \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i<x,\xi>} \mathrm{d}x$$

  et il faut, dans ce cas, adapter les théorèmes.

- *On note souvent $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.*

Théorème 1 *: $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^d), || \, ||_1) \to (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d), || \, ||_\infty)$ est linéaire, continue et vérifie $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.*

Exemple 1 *: Soit $a > 0$ et $f = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a;a]}$ alos $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(at)}{at}$.*

Exemple 2 *: Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$ et $u(x) = e^{-z||x||^2}$ alors $\hat{u}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^d e^{\frac{-||\xi||^2}{4z}}$.*

Proposition 1 *:*

1) *Soient f et g dans L^1 alors $\int \mathcal{F}(f) g = \int f \mathcal{F}(g)$.*
2) *Soit $\alpha \in \mathbb{N}$, si $x^a f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall a \leq \alpha$ alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^\alpha$ et $\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^\alpha (\mathcal{F}(f))^{(\alpha)}$.*
3) *Soit $k \in \mathbb{N}$, si $f \in \mathcal{C}^k$ et $f^{(m)} \in L^1$, $\forall m \leq k$ alors $x^k \mathcal{F}(f) \in L^\infty$ et $\mathcal{F}(f^{(k)}) = i^k x^k \mathcal{F}(f)$.*
4) *Soit $h \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{f(. + h)}(\xi) = e^{i<h,\xi>} \hat{f}(\xi)$.*
5) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}*$, $\widehat{f(\lambda .)}(\xi) = |\lambda|^{-d} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.*
6) *$\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f} \times \hat{g}(\xi)$.*

Théorème 2 <u>*Formule d'inversion*</u> *: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour presque tout x, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) \mathrm{d}t$.*

Corollaire 1 *: $\mathcal{F}$ est injective.*

Proposition 2 *: $\mathcal{F}$ n'est pas surjective.*

Exercice 1 *:*

1) *Vérifier que $g_n = \mathbb{1}_{[-1;1]} \star \mathbb{1}_{[-n;n]} \in L^1$.*
2) *Trouver $f_n \in L^1$ telle que $\hat{f}_n = g_n$ et en déduire que $g_n \in \mathcal{C}_0$.*
3) *Montrer que $||g_n||_\infty$ est bornée.*
4) *Montrer que (f_n) n'est pas bornée dans L^1. (On pourra utiliser un changement de variable et le lemme de Fatou)*
5) *En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective. (On pourra utiliser le théorème de l'isomorphisme de Banach)*

Comme l'application $\mathcal{F}$ n'est pas surjective, on veut trouver un sous espace de L^1 qui est stable par $\mathcal{F}$ et où l'inversion se passe bien. Le bon cadre est celui de l'espace de Schwartz.

1.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Définition 2 *: On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty | \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^d)^2, \exists C_{\alpha,\beta} \, tq \, ||x^\alpha \partial^\beta f||_\infty \leq C_{\alpha,\beta}\}.$$

Remarque 2 *:*

- $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}$
- *On peut remplacer $||x^\alpha \partial^\beta f||_\infty \leq C_{\alpha,\beta}$ par $\lim\limits_{|x| \mapsto +\infty} ||x^\alpha \partial^\beta f||_\infty = 0$ dans la définition.*

Proposition 3 *: $\mathcal{S}$ est dense dans L^p pour la norme L^p, pour $p \in [1; \infty[$.*

Proposition 4 *: $\mathcal{S}$ n'est pas normable mais on définit sa topologie à l'aide des semi-normes : $p_{\alpha,\beta} : f \mapsto \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} ||x^\alpha \partial^\beta f||_\infty$. $\mathcal{S}$ muni de cette topologie ($g_n \to g$ ssi $\forall (\alpha, \beta)$, ${}_{\alpha,\beta}(g_n - g) \to 0$) est complet et métrisable via, par exemple, la distance $d(f, g) = \sum\limits_{\alpha,\beta} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{p_{\alpha,\beta}(f-g)}{1+p_{\alpha,\beta}(f-g)}$.*

Proposition 5 *: $\mathcal{S}$ est stable par multiplication par un monôme et par la dérivation, ainsi que par la multiplication et le produit de convolution ce qui en fait le cadre parfait pour la transformation de Fourier.*

Comme $\mathcal{S}$ est inclus dans L^1, la définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ est la même que celle dans L^1.

Exemple 3 *: $\mathcal{F}(e^{-<Ax,x>})(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}^d}{\sqrt{|\det(A)|}} \right) e^{-\frac{<A^{-1}\xi,\xi>}{4}}$ avec A symétrique réelle positive inversible.*

Théorème 3 *: La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective, bicontinue de $\mathcal{S}$dans $\mathcal{S}$ d'inverse $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{i<x,\xi>} \hat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi$.*

Proposition 6 <u>Formule de Poisson</u> *: Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\sum f(n) = \sum \hat{f}(2\pi n)$*

2 Extension de la transformée de Fourier-Plancherel dans L^2

Dans tout ce paragraphe, on se limite à $\mathbb{R}$ pour plus de facilité d'écriture.

Théorème 4 *: Soit $f \in L^1 \cap L^2$ alors $\hat{f} \in L^2$ et $||f||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||\hat{f}||_2$.*

Lemme 1 *: $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2.*

Théorème 5 *Théorème de Plancherel : La transformée de Fourier-Plancherel $\tilde{\mathcal{F}} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ définie par $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ se prolonge en une isométrie de L^2 sur L^2.*

Remarque 3 *: La formule de la transformée de Fourier n'a plus de sens pour les fonctions dans L^2/L^1, on ne peut donc pas l'utiliser. Pour le calcul pratique, on peut, par exemple, utiliser l'intégrale impropre ou la formule d'inversion.*

Exemple 4 *:*

- $\mathcal{F}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)(\xi) = -\frac{i}{2}sign(\xi)e^{-|\xi|}$.
- $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{1}_{[-a;a]}$.

Proposition 7 *: Soient f et g dans L^2 alors $\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$.*

3 Applications

3.1 Probabilités

Définition 3 *: Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X ou transformée de Fourier de la loi de X, notée φ_X, la transformée de Fourier de la mesure de probabilité associée à X : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int e^{itx}\mathbb{P}(\mathrm{d}x)$.*

Théorème 6 *: La fonction caractéristique d'une variable aléatoire caractérise totalement sa loi (comme son nom l'indique...) : Si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors $X \sim Y$.*

Définition 4 *: On dit qu'une suite (X_n)de variables aléatoires converge en loi vers X ($X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si pour toute fonction ϕ continue bornée, $\mathbb{E}(\phi(X_n)) \to \mathbb{E}(\phi(X))$.*

Théorème 7 *Théorème de Paul Lévy : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$, $\forall t$.*

Théorème 8 *TCL : Soient X une variable aléatoire L^2 ($\mathbb{E}(X^2) < +\infty$) et (X_n) une suite de variables aléatoires iid de même loi que X alors $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, Var(X))$ avec $S_n = \sum X_n$.*

3.2 Équations différentielles

On peut utiliser la transformée de Fourier pour résoudre des EDP :

Exercice 2 *Résolution de l'équation de la chaleur*
On souhaite résoudre l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \dfrac{1}{2}\partial^2_{xx} u(t,x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où u_0 est une fonction intégrable donnée. On va chercher à résoudre l'équation en supposant que "tout est permis" puis on contrôlera *a posteriori* que tous les calculs sont licites. On suppose ainsi qu'il existe une fonction u solution de (1) telle que, pour tout $t > 0$ fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|\, dx < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \right| dx < +\infty, \qquad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \right| dx < +\infty.$$

On suppose de plus que pour tout $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-iyx}\, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-iyx}\, dx.$$

Considérons alors sa transformée de Fourier (en x) :

$$\hat{u}(t,y) := \int u(t,x) e^{-ixy} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

1. Montrer que $\widehat{\partial_x u}(y) = iy\hat{u}(y)$ et $\widehat{\partial^2_{xx} u}(y) = -y^2 \hat{u}(y)$.
2. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \hat{u}(t,y)$ est solution de
$$\partial_t \hat{u}(t,y) = -\frac{1}{2} y^2 \hat{u}(t,y).$$
3. En déduire que
$$\forall t > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(t,y) = \hat{u}_0(y) e^{-y^2 t/2}.$$
4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $p_t(x) = e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{t}$. On peut se souvenir que si Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}(e^{itY}) = e^{t^2/2}$.
5. En déduire que $\forall t > 0$, $x \in \mathbb{R}$:
$$u(t,x) = u_0 * p_t(x)/\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u_0(z) p_t(z-x)\, dx = \mathbb{E}(u_0(x + \sqrt{t}Y)),$$
où Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
6. Vérifier que la solution trouvée u satisfait toutes les hypothèses qui précèdent la première question.

Exercice 3 *Résolution de l'équation des cordes vibrantes*
On considère l'équation des cordes vibrantes :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - a^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0, \\ u(0,x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x)) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

On suppose d'une part que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et que f' et f'' sont intégrables, et d'autre part que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ et que g' est intégrable. En suivant la même méthode que dans l'exercice précédent, exhiber une solution $u(t,x)$ du système ci-dessus telle que u et ses deux premières dérivées par rapport aux variables t et x soient intégrables.

4 Distributions tempérées et transformée de Fourier

4.1 L'espace des distributions tempérées

Définition 5 *: On appelle distribution tempérée une forme linéraire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ continue ie :*

$$\exists (k,l) \in \mathbb{N}^2,\, C > 0 / \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\, |T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

On note $\mathcal{S}'$ l'espace vectoriel des distributions tempérées.

Exemple 5 *:*

- $\delta_0 : f \mapsto f(0)$.
- *L^p pour $p \in [1; +\infty]$ s'injecte dans $\mathcal{S}'$ via : $T_f : g \mapsto \int fg$. ($f \in L^p$ et $g \in \mathcal{S}$)*

Remarque 4 *:*

1) *On identifie souvent T_f et f.*
2) *$f \in L^p$ n'est pas une condition nécessaire pour que T_f soit une distribution tempérée. En effet, $ie^x e^{ie^x} \in \mathcal{S}'$ mais $|ie^x e^{ie^x}| = e^x \notin L^p$ pour $p \in [1, +\infty]$.*
3) *Comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ et que la famille des semi-normes $p_{0,\beta}$ caractérise la topologie sur $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}'$ peut être identifié à un sous espace de $\mathcal{D}'$.*

Proposition 8 *: Soit $T \in \mathcal{S}'$, on peut donc définir la dérivée au sens des distributions de T, T' par : $T'(\varphi) = -T(\varphi')$. De plus, la dérivation est un opérateur linéraire continue de $\mathcal{S}'$ dans lui-même.*

Proposition 9 *: $\mathcal{S}'$ est stable par multiplication par un polynôme (ou par une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente) : $(x^n T)(\varphi) = T(x^n \varphi)$.*

4.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Définition 6 *: Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{T}$ ou $\mathcal{F}(T)$ par : $\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$.*

Théorème 9 *: La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ est une application linéaire bijective, bicontinue de $\mathcal{S}'$ sur lui-même.*

Proposition 10 *: Par la définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$, de nombreuses propriétés se transmettent :*

- $\mathcal{F}(\partial^\beta T) = (2i\pi)^\beta x^\beta \mathcal{F}(T)$.
- $\mathcal{F}(x^\alpha T) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^\alpha \partial^\alpha \mathcal{F}$.
- *La définition de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$ coïncide avec celle sur L^1 : si $f \in L^1$ alors $\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$.*

Exemple 6 *:*

- $\hat{\delta}_0 = 1$.
- $\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0$.
- $\mathcal{F}(vp\left(\frac{1}{x}\right)) = -2i\pi H + i\pi$ *où* $H = \mathbb{1}_{x>0}$.
- $\hat{H} = -ivp\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0$.

Application 1 *: Équation de Schrödinger : On considère l'équation de Schrödinger : $\partial_t E - i\Delta_x E = \delta_0$. Il existe une solution donnée par la distribution tempérée :*

$$E : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{di\pi}{4}}}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t,x) e^{i\frac{||x||^2}{4t}} \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Richard Eon
Courriel : richardeon@hotmail.com