Université de Rennes 1, Préparation à l'Agrégation de Mathématiques 2013-2014

Problème d'Analyse 2 - Vrai ou Faux ?

1. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est impaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$.

2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue, alors :
- $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$,
- f est bornée au voisinage de l'infini,
- il existe $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

3. L'espace $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre pour les opérations :
- $(+, \lambda\cdot, \times)$, où $\times$ est p.p. le produit ponctuel,
- $(+, \lambda\cdot, *)$, où $*$ est le produit de convolution.

4. Pour $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, si $f \in H(\Omega)$, alors $|f|^2 \in H(\Omega)$.
$\Rightarrow$ Résoudre la question I.2]c) avec le théorème de Cauchy.

5. La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$ définie par la formule du sujet se prolonge en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$.

6. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une constante C telle que $(\mathcal{F}^2 f)(x) = Cf(-x)$.
$\Rightarrow$ Qu'en est-il de **5** et **6** si on change la formule de la transformée de Fourier L^1 ?