Préparation Agrégation de Mathématiques
Septembre 2014

TD 2

Exercice 1

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $G \neq \{0\}$. On pose

$$G_+^* = \{x \in G, \quad x > 0\} \tag{1}$$

et on note a la borne inférieure de G_+^*.

1. (a) On suppose que $a > 0$. Montrer que $a \in G$ et que $G = a\mathbb{Z}$.
   (b) On suppose que $a = 0$.
      i. Montrer que:
      $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists g \in G, \quad 0 < g < \varepsilon. \tag{2}$$
      ii. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et les groupes de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$.
   (d) Montrer que tout sous-groupe non fermé de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\beta/\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose
$$G(\alpha, \beta) = \{p\alpha + q\beta, \quad (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}. \tag{3}$$
Montrer que $G(\alpha, \beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$ et distinct de $\mathbb{R}$.

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\omega}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. On pose
$$\Gamma(\omega) = \{e^{ip\omega}, \quad p \in \mathbb{Z}\}. \tag{4}$$
Montrer que $\Gamma(\omega)$ est dense dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$.

4. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$. Montrer que: H est soit le groupe des racines n ièmes de 1 pour un certain entier n, soit un sous-groupe infini et dense de $\mathbb{U}$.

Exercice 2

1. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, il existe un unique entier $q \in \mathbb{N}$ tel que
$$(q-1)x < 1 \leq qx. \tag{5}$$
Dans la suite, on note $f(x) := q$ et on pose
$$g(x) = qx - 1. \tag{6}$$
   (b) Montrer que $0 \leq g(x) < x$ et que f est une fonction décroissante sur]0,1[.
   (c) Soit $x \in]0,1[\setminus\mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par:
$$x_0 = x, \quad x_n = g(x_{n-1}) \tag{7}$$
est convergente vers une limite $y \geq 0$.
   (d) Montrer que la suite de terme général $q_n = f(x_n)$ est croissante vers $+\infty$.
   (e) En déduire que $y = 0$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose
$$D_\alpha = \{p\alpha + q, \quad (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}. \tag{8}$$
Montrer que la suite (x_n) définie par (7) est dans D_x. En déduire que D_α est dense dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose que $\omega/\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on pose
$$C_\omega = \{e^{ip\omega}, \quad p \in \mathbb{N}\} \tag{9}$$
Montrer que C_ω est dense dans $U = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$ et $C_\omega \neq U$. Comparer ce résultat avec celui de l'Exercice 1.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des q_i, p_i, $i = 1, \cdots, N$, tels que:
$$1 \leq q_i \leq N, \quad 0 < q_i x - p_i < q_{i+1}x - p_{i+1} < 1, \quad 1 \leq i \leq N \tag{10}$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe des entiers p, q tels que
$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad |qx - p| \leq \frac{1}{N+1}. \tag{11}$$

Exercice 3

1. Soit $f: A \to \mathbb{R}$ définie sur $A = \mathbb{R}+$ ou $A = \mathbb{R}$ vérifiant
$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in A. \tag{12}$$
Montrer que: $\forall x \in A, \quad \forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \quad f(rx) = rf(x).$

2. Montrer que si f est continue, alors f est de la forme
$$x \mapsto kx, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

3. Montrer que (13) reste valable lorsque f est supposée monotone, non nécessairement continue.

4. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y > 0. \tag{14}$$
   (a) Montrer que:
   $$\forall x > 0, \quad \varphi(x) > 0. \tag{15}$$
   (b) En utilisant un changement de variable: $\theta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_*^+$, exprimer φ en fonction de f.
   (c) En déduire que φ est de la forme
   $$x \mapsto x^k, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{16}$$
   (d) Que devient φ si $A = \mathbb{R}^+$? si $A = \mathbb{R}$?

5. Montrer que tout morphisme continu non constant de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$ est surjectif.

Exercice 4

Soit (E, d) un espace métrique, soit $f : \mathbb{R}^+ \to E$ une application uniformément continue et soit (x_n) une suite de réels > 0, strictement croissante vers $+\infty$, telle que
$$\lim_{n \to +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0. \tag{17}$$

1. Soit (u_n) une suite de réels > 0 tendant vers $+\infty$. Pour tout $n \geq 0$, on pose
$$p_n = 0 \quad \text{si} \quad u_n \leq x_0 \tag{18}$$
et
$$p_n = \inf\{p \in \mathbb{N}, \quad x_p \geq u_n\} \quad \text{sinon.} \tag{19}$$
Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$ et que
$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - x_{p_n}| = 0. \tag{20}$$

2. On suppose que
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b. \tag{21}$$
Montrer que b est une valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))$.

3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f(x_n))$ coïncide avec l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en $+\infty$.

4. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $\cos(\sqrt{n})$ est $[-1, 1]$.

5. Montrer que l'ensemble $\{e^{ix_n},\ n \geq 0\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \to E$ continue, périodique de période $T > 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f(x_n))$ est $f(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soit (x_n) une suite réelle bornée telle que
$$\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0. \tag{22}$$
et soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que c n'est pas une valeur d'adhérence de (x_n). Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et un entier $n_0 > 0$ tels que
$$\{x_n,\ n \geq n_0\} \subset]c + \alpha, +\infty[\quad \text{ou} \quad \{x_n,\ n \geq n_0\} \subset] - \infty, c - \alpha[. \tag{23}$$

2. En déduire que A est contenu dans l'un des intervalles $] - \infty, c[$ et $]c, +\infty[$.

3. Montrer que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.