Préparation Agrégation de Mathématiques
Octobre 2014

TD Analyse: Feuille 3

Exercice 1

1. Etudier la nature de l'intégrale

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\beta \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - 2(1-\cos u)}} \tag{1}$$

en fonction des paramètres $\alpha \in]0,+\infty[$ et $\beta \in]0,+\infty]$.

2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la solution maximale θ de l'équation différentielle avec conditions initiales:

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \alpha > 0 \tag{2}$$

est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe un intervalle A de $\mathbb{R}$ tel que: pour tout $\alpha \in A$, θ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. On suppose que $\alpha \notin A$. Déterminer $I = \theta(\mathbb{R})$. Existe-t-il des valeurs de $\alpha \notin A$ pour lesquelles θ induit un difféomorphisme $\mathbb{R} \to I$?

5. Résoudre (2) en fonction des valeurs de $\alpha > 0$.

Exercice 2

1. Montrer que pour $n \geq n_0$ suffisamment grand:

$$2\ln(n) \leq n. \tag{3}$$

2. Montrer que

$$e \geq 2 \quad \text{et} \quad e\sqrt{e} \geq 3. \tag{4}$$

3. Soit $(c_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que

$$|c_n| \leq \frac{1}{2n^2}, \quad \forall n \geq 0. \tag{5}$$

On définit par récurrence une suite de fonctions P_n en posant:

$$P_1 \equiv c_1, \tag{6}$$

$$P_n'(t) = -\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)P_{n-k}(t), \quad P_n(0) = c_n, \quad n \geq 2. \tag{7}$$

Montrer que $(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite de polynômes.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}. \tag{8}$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} \leq \frac{8}{n^2}. \tag{9}$$

(c) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |P_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}e^{8n|t|}. \tag{10}$$

(d) En déduire que la série $\sum P_n(t)x^n$ converge pour tout (t,x) dans un ouvert Ω contenant $(0,0)$ que l'on précisera vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

(e) Montrer que f est solution sur Ω de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + xf\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \forall (t,x) \in \Omega. \tag{11}$$

5. (a) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une solution de (11) sur Ω. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Montrer qu'il existe un intervalle $I \ni t_0$ et $X \in \mathcal{C}^1(I)$ tels que

$$\forall t \in I, \quad (t, X(t)) \in \Omega \quad \text{et} \quad X'(t) = X(t)f(t, X(t)). \tag{12}$$

(b) Soit $J \ni t_0$ un intervalle ouvert. On suppose que

$$\forall t \in J, \quad (t, Z(t) := x_0 + (t - t_0)x_0 f(t_0, x_0)) \in \Omega. \tag{13}$$

On pose:

$$T = \sup\{t \in J : \ \forall s \in [t_0, t[, \ Z(s)f(s, Z(s)) = x_0 f(t_0, x_0)\}. \tag{14}$$

Montrer que $T > t_0$ puis que $T \notin J$.

6. (a) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^2$. Montrer que les seules solutions de (11) sont les fonctions constantes.

   (b) Déterminer les fractions rationnelles de la forme $(t, x) \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(t)}$ solutions de (11) sur leur domaine de définition.

   (c) En déduire une solution non constante de (11) lorsque $\Omega = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

7. (a) On suppose $c_1 \neq 0$. Déterminer le degré de P_n, $n \geq 1$.

   (b) Pour $n \geq 1$, on note d_n le coefficient du terme dominant de P_n. Montrer que la suite (d_n) peut être définie par une relation de récurrence.

   (c) Soit (e_n) la suite définie par

$$e_n = \sum_{k=1}^{n-1} e_k e_{n-k}, \quad n \geq 2, \quad e_1 = 1. \tag{15}$$

   Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad |d_n| \leq e_n. \tag{16}$$

   (d) Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum e_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{4}$. On note $e(z)$ la somme de la série $\sum e_n z^n$.

   (e) Montrer que sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, la somme de la série $\sum d_n x^n$ est solution de l'équation différentielle:

$$xy'(1 + y) - y = 0, \quad |x| < \frac{1}{4}. \tag{17}$$

   (f) Montrer que l'équation $we^w = x$ permet de définir une application $w : \ [-e^{-1}, +\infty[\to [-1, +\infty[$ solution de (17) telle que

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1. \tag{18}$$

Exercice 3

Soit E l'espace des fonctions continues: $[0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ et soit $T: f \mapsto T(f)$ défini par

$$\forall f \in E, \quad \forall s \in [0,1], \quad T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt \tag{19}$$

où $K: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est l'application définie par

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ (1-t)s & \text{sinon} \end{cases} \tag{20}$$

1. Montrer que T est un opérateur linéaire continu de E dans E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dont on exprimera les dérivées $(T(f))'$ et $T(f)''$ en fonction de f.
3. Montrer que T est injectif.
4. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T et si $f \in E$ est un vecteur propre associé, alors $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et résoud le problème:
$$\lambda f'' + f = 0, \quad f(0) = f(1) = 0. \tag{21}$$
5. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T et calculer les sous-espaces propres associés.