Agrégation 2014-2015
Université Rennes I

Préparation à l'épreuve écrite

Exercice 1

1. Dénombrer les éléments d'ordre 35 dans $\mathfrak{S}_{12}$.

2. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathfrak{S}_{12}$?

Exercice 2

Dénombrer les éléments de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe.

Exercice 3

1. Démontrer que l'application $x \mapsto 2x$ est une permutation de $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

2. Donner sa décomposition en cycles à supports disjoints.

3. Quelle est la signature de cette permutation ? Était-ce prévisible ?

Exercice 4

En utilisant la décomposition de Dunford, montrer que tout élément M de $GL_n(\mathbb{C})$ admet une écriture unique sous la forme :

$$M = DR$$

avec D diagonalisable et R unipotente, telles que D et R commutent.
Comment cela se généralise-t-il à un corps quelconque ?

Exercice 5

1. Quelle décomposition classique obtient-on en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille des colonnes d'une matrice ?

2. Que savez-vous de cette décomposition ?

Exercice 6

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (S, O) tel que $M = SO$, avec S symétrique définie positive, et O orthogonale. Montrer que $S \in \mathbb{R}[M^tM]$.

2. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = U^{-1}BU.$$

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

3. On suppose que la matrice U de la question précédente est unitaire. En choisissant convenablement P et en considérant sa décomposition polaire, montrer que A et B sont orthonogalement semblables.

Exercice 7

Une partition de l'entier $n \geq 1$ est une suite décroissante $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$ d'entiers strictement positifs tels que $n = \sum_{i\geq 1} \lambda_i$.

1. En quoi les partitions de n sont-elles reliées au groupe $\mathfrak{S}_n$? Aux endomorphismes nilpotents dans $\mathcal{L}(K^n)$?

2. Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ une partition de n. Montrer que la famille Λ' définie par :

$$\lambda'_i = \#\{j \geq 1 \mid \lambda_j \geq i\}$$

définit une autre partition de n.

3. On appelle tableau d'Young associé à Λ le tableau constitué de n cases réparties en r lignes, la i-ème ligne contenant λ_i cases. Comment obtient-on le tableau d'Young de Λ' à partir de celui de Λ ?

4. En déduire que $(\Lambda')' = \Lambda$.

5. On met sur les partitions de n la relation suivante : on dit que $\Lambda \geq T$ si pour tout $i \geq 0$,

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{i} t_j.$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

On veut montrer que si $\mathcal{O}$ est l'orbite d'une matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p(A)$ désigne la partition de n associée à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, on a $\overline{\mathcal{O}} = \cup_{p(A)\leq p(N)} \mathcal{O}_A$.

6. Montrer que $\Lambda \mapsto \Lambda'$ est décroissante pour l'ordre précédent.

7. Soit N nilpotente. En considérant la famille $(\dim\ker N^i - \dim\ker N^{i-1})$, montrer que l'adhérence de l'orbite de N est une réunion d'orbites de matrices nilpotentes dont la partition est $\leq$ celle de N.

8. Montrer que si $\Lambda > T$, il existe une partition A, telle que $T < A \leq \Lambda$, avec $a_i = t_i$ sauf en deux indices $i_0 < i_1$, où $a_{i_0} = t_{i_0} + 1$ et $a_{i_1} = t_{i_1} - 1$.

9. Commençant par traiter le cas où A a deux blocs de Jordan de taille m et où N a deux blocs de Jordan de tailles respectives $m+1$ et $m-1$, montrer que l'adhérence de l'orbite de N contient l'orbite de A.

Exercice 8

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie. On fait agir $GL(E)$ naturellement sur E.

1. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Décrire l'orbite de F sous l'action de $GL(E)$.

2. Décrire le stabilisateur de F sous cette action.

3. On suppose que K est fini, de cardinal q. Dénombrer le stabilisateur de F.

4. En déduire le nombre de sous-espaces vectoriels de E de dimension donnée.