Planche 1

Prépa Agreg Rennes – EBAN 2014

12 novembre 2015

Exercice 1 A-t-on toujours

$$\log e^z = z, \quad \log(e^{z_1}\, e^{z_2}) = z_1 + z_2?$$

Exercice 2 Soit f une fonction holomorphe sur Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ tel que $1/f$ soit holomorphe sur Ω aussi. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f = \exp(g)$.

Exercice 3 Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert Ω. Le but est de prouver que pour tout z_0 dans $\mathbb{C}$, il existe un entier m et un difféomorphisme d'un voisinage de z_0 sur un voisinage de 0 tel que

$$f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^m.$$

Soit alors z_0 dans $\mathbb{C}$.
1. Montrer qu'il existe m tel que sur un voisinage de z_0, $f(z) - f(z_0) = \alpha(z - z_0)^m h(z)$ avec h holomorphe sur Ω, $h(z_0) = 1$.
2. En utilisant l'existence d'une détermination analytique de la racine m-ième sur $\mathrm{D}(1, 1)$ (disque centré en 1 et de rayon 1), montrer qu'il existe sur un voisinage de z_0 une fonction g analytique telle que $h = g^m$.
3. Conclure.

Exercice 4 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\,\rho(x)\mathrm{d}x \;<\; \infty.$$

Il s'agit de montrer que les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho\,\mathrm{d}x)$.
1. Soit f une fonction de $\mathrm{L}^2(I, \rho\,\mathrm{d}x)$. Montrer que la fonction φ définie par

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une fonction $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
2. On pose (transformée de Fourier de φ)

$$\hat{\varphi} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_I f(x)\rho(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\hat{\varphi}$ est bien définie, est qu'elle se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |\mathfrak{Im} z| < \alpha/2\}$.
3. En calculant $F^{(n)}(0)$, montrer que si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle f, x^n \rangle_I = \int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0,$$

alors $f = 0$ dans $\mathrm{L}^2(I, \rho\,\mathrm{d}x)$. Conclure.

Remarque : Il est bon de connaître les familles de polynômes orthogonaux usuelles (Legendre, Hermite, Tchebychev, ...), avec les fonctions poids associées, de savoir retrouver les relations de récurence, prouver l'orthonormalité de la famille...

Exercice 5 On définit

$$f : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

1. Montrer que f est une fonction holomophe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2.$$

Indication : on pourra montrer que la différence se prolonge en une fonction entière (i.e. holomorphe sur $\mathbb{C}$) et bornée, puis appliquer le théorème de Liouville.

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ (fonction continue à support compact). On pose

$$f_n(x) := \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2(x-y)^2} f(y)\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que la suite f_n converge uniformément vers f sur tout compact.
2. Montrer que f_n s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ non dérivable en 0. La suite f_n peut-elle converger uniformément dans un voisinage complexe de 0 ?