Exercice 1 (*Extrait du sujet 2002*)

On appelle espace sesquilinéaire symétrique un couple (E, b) où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et b est une forme sesquilinéaire symétrique sur E, *i.e. :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E, \quad b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y) \quad \text{et} \quad b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x, y);$$
$$\forall x, y \in E, \quad b(x, y) = \overline{b(y, x)}.$$

Une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace sesquilinéaire symétrique (E, b) est dite semi-orthonormée si elle est orthogonale et que pour tout i, $b(e_i, e_i)$ est égal à 1, 0 ou -1.

1. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. On suppose b non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $b(x, x)$ soit non nul. Montrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que $b(y, y)$ soit égal à 1 ou -1.
2. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée de (E, b).
3. On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ et que la forme b est définie par la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Construire une base semi-orthonormée de (E, b).
4. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base semi-orthonormée de (E, b). Soit E_+ (respectivement E_-, E_0) le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_i vérifiant $b(e_i, e_i) = 1$ (respectivement $b(e_i, e_i) = -1$, $b(e_i, e_i) = 0$). Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que $F \cap (E_- \oplus E_0)$ est nul si b est définie positive sur F et que $F \cap (E_+ \oplus E_0)$ est nul si b est définie négative sur F.
   (b) En déduire que le nombre $\sum_i b(e_i, e_i)$ est indépendant de $\mathcal{B}$. Ce nombre sera noté $\sigma(E)$.
5. Soient $n > 0$ un entier et E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :
$$b(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer le nombre $\sigma(E)$.

Exercice 2 (*Extrait du sujet 2002*)

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle orthogonal à droite (respectivement orthogonal à gauche) de F l'ensemble noté $F^\perp$ (respectivement ${}^\perp F$) des vecteurs $x \in E$ qui vérifient :

$$\forall y \in F, \quad b(y, x) = 0 \quad (\text{respectivement } b(x, y) = 0).$$

On dit que la forme b est non-dégénérée si $E^\perp$ et ${}^\perp E$ sont nuls.

1. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit M la matrice de b dans cette base, *i.e.* la matrice dont les coefficients sont les nombres $b(e_i, e_j)$.
   (a) Soient x et y deux vecteurs de E et X et Y les matrices colonnes ayant comme coefficients les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer la formule :
   $$b(x, y) = {}^t X M \overline{Y}.$$
   (b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
      i. b est non-dégénérée ;
      ii. M est inversible ;
      iii. $E^\perp = \{0\}$;
      iv. ${}^\perp E = \{0\}$.

2. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que $F^{\perp}$ et ${}^{\perp}F$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer les inégalités :
   $$\dim F + \dim F^{\perp} \geq \dim E \quad \text{et} \quad \dim F + \dim {}^{\perp}F \geq \dim E.$$
   Montrer que ces inégalités sont des égalités si b est non-dégénérée sur E.
   (c) On suppose que b est non-dégénérée sur F. Montrer les égalités :
   $$E = F \oplus F^{\perp} = F \oplus {}^{\perp}F.$$

3. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2). Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :
   $$\forall i \in \{1,2\}, \quad b(e_i, e_1) = 0 \quad \text{et} \quad b(e_i, e_2) = 1.$$
   Déterminer un sous-espace vectoriel F de E tel que $F^{\perp}$ et ${}^{\perp}F$ n'aient pas la même dimension.