Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2015–2016

Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 1

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres de $\mathbb{N}^*$ qui ne sont divisibles par aucun carré de nombres premiers, i.e. le sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$ formé de 1 et des produits $p_1 \times \cdots \times p_r$ où $r \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \cdots, p_r$ sont r nombres premiers distincts.

1. (a) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose que 0 est un point isolé de $G \cap \mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $G = c\mathbb{Z}$.

   (b) Décrire les sous-groupes G de $(R^{+*}, \times)$ tels que 1 soit un point isolé de $G \cap [1, +\infty[$.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x + y\sqrt{m} > 1$ et $x^2 - my^2 = 1$. Ranger par ordre croissant les réels $x + y\sqrt{m}$, $x - y\sqrt{m}$, $-x + y\sqrt{m}$. En déduire que $x + y\sqrt{m} \geq 1 + \sqrt{m}$.

   (b) Soit

   $$G_m = \{x + y\sqrt{m},\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x + y\sqrt{m} > 0,\ x^2 - my^2 = 1\}.$$

   Montrer que G_m est soit réduit à $\{1\}$ soit de la forme $\{\gamma_m^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $\gamma_m \geq 1 + \sqrt{m}$.

   (c) Pour tout $q \in \mathcal{N}$ on pose:

   $$A_q = \{\lambda \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ n(n+1) = q\lambda^2\}.$$

   Montrer que A_q est soit vide, soit de la forme $\{\lambda_{j,q},\ j \geq 1\}$ où $(\lambda_{j,q})_{j \geq 1} \in \mathbb{N}^*$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telle que:

   $$\forall j \geq 1, \quad \lambda_{j+1,q} \geq (1 + 2\sqrt{q})\lambda_{j,q}.$$

   Indication: Remarquer que

   $$n(n+1) = q\lambda^2 \iff (2n+1)^2 - 4q\lambda^2 = 1.$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{B}$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions continues bornées $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et soit $\mathcal{C}$ la sous-algèbre de $\mathcal{B}$ constituée des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit G_ω le sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\mathbb{R}\omega$ et $2\pi\mathbb{Z}^n$, i.e.:

$$G_\omega = \mathbb{R}\omega + 2\pi\mathbb{Z}^n = \{s\omega + 2\pi v,\ (s, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n\}.$$

1. On suppose que la famille $(\omega_j)_{1 \leq j \leq n}$ est $\mathbb{Q}$-liée.

   (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire non identiquement nulle ℓ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\ell(G_\omega) \subset \mathbb{Z}$.

   (b) Le sous-groupe G_ω est-il dense dans $\mathbb{R}^n$?

2. On suppose que famille $(\omega_j)_{1 \leq j \leq n}$ est $\mathbb{Q}$-libre. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit e_λ l'élément de $\mathcal{B}$ défini par:

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$$

   On note $\mathcal{P}_\mathbb{Z}$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ (espace de polynômes trigonométriques à fréquences réelles).

   (a) On pose:

   $$\forall f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{C},\ \forall T > 0,\ J_T(f_1, \cdots, f_n) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\Pi_{j=1}^n f_j(\omega_j t)\right) dt.$$

   Montrer que

   $$\forall f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{P}_\mathbb{Z},\ \lim_{T \to +\infty} J_T(f_1, \cdots, f_n) = \Pi_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(t)\ dt\right)$$

   (b) Montrer que

   $$\forall f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{C},\ \lim_{T \to +\infty} J_T(f_1, \cdots, f_n) = \Pi_{j=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(t)\ dt\right)$$

   (c) Montrer que G_ω est dense dans $\mathbb{R}^n$.

3. On suppose que la famille $(\omega_j)_{1\leq j\leq n}$ est $\mathbb{Q}$-libre. Soit $(g_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathcal{C}$ à valeurs réelles et soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(\omega_j t).$$

Montrer que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} g(t) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{t\in\mathbb{R}} g_j(t).$$

4. Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Soit Λ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre réelle des fonctions de $\mathcal{B}$ à valeurs réelles. On note $\mathcal{P}_\Lambda$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $\mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}}$ le sous-espace réel $\mathcal{P}_\Lambda \cap \mathcal{B}^{\mathbb{R}}$ de $\mathcal{P}_\Lambda$.

   A l'aide de la famille libre $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, on définit une norme sur $\mathcal{P}$ en posant, pour toute famille presque nulle $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}} \in \mathbb{C}$:

$$N\left(\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} c_\lambda e_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} |c_\lambda|.$$

   On a: $\forall p \in \mathcal{P}, \quad \|p\|_\infty \leq N(p)$.

   Soit Γ une partie non vide $\mathbb{Q}$-libre de $\mathbb{R}$ et soit $c > 0$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $\Lambda_\gamma \subset \mathbb{Z}^*$ un ensemble tel que:

$$-\Lambda_\gamma \subset \Lambda_\gamma \tag{1}$$

   et

$$K(\Lambda_\gamma) := \sup\left\{\frac{N(p)}{\sup(p)},\ p \in \mathcal{P}_{\Lambda_\gamma}^{\mathbb{R}} \setminus \{0\}\right\} < +\infty, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{2}$$

   On suppose que $K(\Lambda_\gamma) \leq c$, $\forall \gamma \in \Gamma$. Montrer que $\Lambda := \cup_{\gamma\in\Gamma} \gamma\Lambda_\gamma$ vérifie (1)–(2) avec Λ_γ remplacé par Λ et que

$$K(\Lambda) := \sup\left\{\frac{N(p)}{\sup(p)},\ p \in \mathcal{P}_\Lambda^{\mathbb{R}} \setminus \{0\}\right\} \leq c.$$

5. Soit Λ une partie infinie de $\mathbb{Z}^*$. On suppose que Λ est symétrique, i.e.: $-\Lambda \subset \Lambda$. Il existe donc une suite strictement croissante $(\lambda_j)_{j\geq 1} \in \mathbb{N}^*$ telle que Λ se décompose sous la forme:

$$\Lambda = \{\lambda_j,\ j \geq 1\} \cup \{-\lambda_j,\ j \geq 1\}.$$

On note:

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

(a) Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe au plus une suite presque nulle $(\varepsilon_j)_{j\geq 1} \in \{-1, 0, 1\}$ telle que $n = \sum_{j\geq 1} \varepsilon_j \lambda_j$. Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1} \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $R_k^\varphi \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad R_k^\varphi(t) = \Pi_{j=1}^k (1 + \cos(\lambda_j t + \varphi_j)).$$

i. Soit $k, m \in \mathbb{N}^*$ avec $m \leq k$. Calculer $\widehat{R_k^\varphi}(0)$, $\widehat{R_k^\varphi}(\lambda_m)$, $\widehat{R_k^\varphi}(-\lambda_m)$.

ii. Soit $p \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut déterminer k et φ de façon à avoir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)R_k^\varphi(t)\,dt = \sum_{m\geq 1} |\hat{p}(\lambda_m)|.$$

iii. Montrer que

$$K(\Lambda) := \sup\left\{\frac{N(p)}{\sup(p)},\ p \in \mathcal{P}_\Lambda^\mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} \leq 2. \qquad (3)$$

(b) On suppose que $\lambda_{j+1} \geq 3\lambda_j$, $\forall j \geq 1$. Montrer que (3) est encore vrai.