Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2015–2016

Espaces vectoriels normés.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application M-Lipschitzienne. Montrer qu'il existe une unique application M-Lipschitzienne $\tilde{f} : E \to F$ telle que $\forall a \in A$, $\tilde{f}(a) = f(a)$.

Indication: Pour tout $x \in E$, considérer une suite $(a_n)_{n\geq 0} \in A$ qui converge vers x et montrer que la suite $(f(a_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Exercice 2

1. Soit $n \geq 1$ et soit $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\gamma(x_1, \cdots, x_n) = \exp\left(-\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

   (a) Montrer que γ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que $\forall p \geq 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u_1, \cdots, u_n)\, du_1 \cdots du_n = \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt_1, \cdots, pt_n)\, dt_1 \cdots dt_n = 1.$$

   (b) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Montrer que, $\forall p \geq 1$, l'application

$$g_p(x_1, \cdots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} p^n \gamma(pt_1, \cdots, pt_n) f(x_1 - t_1, \cdots, x_n - t_n)\, dt_1 \cdots dt_n$$

   est bien définie et que la suite $(g_p)_{p\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^n$.

   (c) Montrer que $\forall p \geq 1$, la fonction g_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
   Indication: On pourra effectuer le changement de variable: $v_1 = x_1 - t_1, \cdots, v_n = x_n - t_n$.

(d) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $E \neq \{0\}$. Soit $\mathrm{Lip}_0(E)$ l'ensemble des fonctions Lipschitziennes $f : E \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. On pose:

$$\forall f \in \mathrm{Lip}_0(E), \quad \|f\|_L = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|},\ (x, y) \in E^2,\ x \neq y \right\}$$

Montrer que pour $\forall f \in \mathrm{Lip}_0(E)$, il existe une suite $(h_p)_{p \geq 0} \subset \mathrm{Lip}_0(E)$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur E, uniformément convergente vers f sur E, telle que $\|h_p\|_L \leq \|f\|$, $\forall p \geq 0$.

Exercice 3

Montrer que l'application $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $t \mapsto (t, \sin(t))$, est une isométrie non linéaire.

Exercice 4

Soit $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_2)$ un espace préhilbertien.

1. Soit $(x, y) \in \mathcal{H}^2$. On suppose qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|tx + (1 - t)y\|_2$. Montrer que $x = y$.

2. Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$ tels que $x_1 = x_2 + x_3$ et $\|x_1\|_2 = \|x_2\|_2 + \|x_3\|_2$. Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x_2 = \lambda x_1$.

   Indication: On pourra se ramener au cas où les x_i sont non nuls et considérer les vecteurs normalisés $\|x_i\|_2^{-1} x_i$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ une isométrie telle que $\varphi(0) = 0$. Montrer que: $\varphi(t) = t\varphi(1)$, $\forall t \geq 0$.

4. Soit $(Y, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit $\phi : Y \to \mathcal{H}$ une isométrie telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x, y \in Y, \quad \phi(x + ty) = (1 - t)\phi(x) + t\phi(x + y).$$

5. Montrer que $\phi : Y \to \mathcal{H}$ est linéaire.

Exercice 5

1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, H un hyperplan de X et soit $u \in X \setminus H$. Soit $h^* \in H^*$ tel que $\|h^*\| = 1$. Montrer que:

$$\sup_{h_1 \in H} (\langle h^*, h_1 \rangle - \|h_1 - u\|) \leq \inf_{h_2 \in H} (\langle h^*, h_2 \rangle + \|h_2 - u\|).$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{h_1 \in H} (\langle h^*, h_1 \rangle - \|h_1 - u\|) \leq a \leq \inf_{h_2 \in H} (\langle h^*, h_2 \rangle + \|h_2 - u\|).$$

   (a) On définit $x^* : X \to \mathbb{R}$ comme suit:

$$\forall (h, t) \in H \times \mathbb{R}, \quad \langle x^*, h + tu \rangle = \langle h^*, h \rangle + ta.$$

   Montrer que $x^* \in X^*$ et que $\|x^*\| = 1$.

   (b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\forall x^* \in F^*$,

$$\exists y^* \in E^* \quad \text{tel que} \quad \|x^*\| = \|y^*\| \quad \text{et} \quad \langle x^*, x \rangle = \langle y^*, x \rangle, \quad \forall x \in F.$$

3. Dans toute la suite de l'exercice, $(X, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé de dimension infinie, séparable et on note $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dense dans X. Soit $x \in X$ fixé.

   (a) Montrer qu'il existe une suite croissante $(E_k)_{k \geq 0}$ de sous-espaces de dimension finie de X telle que $x \in E_0$ et $V = \cup_{k \geq 0} E_k$ soit dense dans X.

   (b) Montrer qu'il existe $v^* \in V^*$ de norme $\|v^*\| = 1$ tel que $\langle v^*, x \rangle = \|x\|$.
   Indication: On pourra utiliser 2.b.

   (c) Montrer qu'il existe $x^* \in X^*$ de norme $\|x^*\| = 1$ tel que $\langle x^*, x \rangle = \|x\|$.

4. Soit $J_X : X \to X^{**}$ définie par

$$\forall (x, x^*) \in X \times X^*, \quad J_X(x)(x^*) = \langle x^*, x \rangle.$$

   Montrer que J_X est une isométrie linéaire.

5. (a) Soit $(x_n^*)_{n\geq 0}$ une suite de X^* telle que $\|x_n^*\| \leq 1$, $\forall n \geq 0$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)}^*)_{n\geq 0}$ telle que la suite $(\langle x_{\phi(n)}^*, x_k\rangle)_{n\geq 0}$ converge pour tout $k \geq 1$.
   (b) Montrer que la suite $(\langle x_{\phi(n)}^*, z\rangle)_{n\geq 0}$ converge pour tout $z \in X$.
   (c) Pour tout $z \in X$, on pose: $\langle x^*, z\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_{\phi(n)}^*, z\rangle$. Montrer que l'application x^* ainsi définie est une forme linéaire et que $\|x^*\| \leq 1$.
6. Soit $j : \mathbb{R} \to X$ une isométrie telle que $j(0) = 0$.
   (a) Montrer que
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists x_k^* \in X^* \text{ tel que } \|x_k^*\| = 1 \text{ et } \langle x_k^*, j(k) - j(-k)\rangle = 2k.$$
   (b) Montrer que
   $$\langle x_k^*, j(t)\rangle = t, \quad \forall t \in [-k, k].$$
   (c) En déduire qu'il existe $x^* \in X^*$ tel que $\|x^*\| = 1$ et $\langle x^*, j(t)\rangle = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

On appelle tore de $\mathbb{R}^k$, et on note $\mathbb{T}^k$, le groupe additif quotient du groupe $(\mathbb{R}^k, +)$ par le groupe $(\mathbb{Z}^k, +)$. Tout $x \in \mathbb{T}^k$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = (x_1, \cdots, x_k)$ avec $x_i \in \mathbb{T}^1$, $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$.

On définit la projection canonique $\Pi :\ \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$.

1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^k$. Montrer que $\inf_{x\in\mathbb{Z}^k\setminus\{0\}} N(x) > 0$.
2. On définit une application $d :\ \mathbb{T}^k \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ en posant:
   $$d(y, y') = \inf\{N(x - x'),\ (x, x') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k,\ \Pi(x) = y,\ \Pi(x') = y'\}$$
   Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{T}^k$.
3. Montrer que $\Pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k$ est continue.