**Préparation Agrégation de Mathématiques**
**Année 2015–2016**

**Calcul Différentiel. Différentiabilité des fonctions convexes**

# Exercice 1

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $|(x_1, x_2)| = \max(|x_1|, |x_2|)$. Soit $\gamma > 0$ et soit $\mathcal{L}_\gamma$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziennes s'annulant en 0. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_\gamma$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On pose: $\forall y \neq x$,

$$\Delta_y \varphi = \frac{(y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))}{|(y, \varphi(y)) - (x, \varphi(x))|},$$

$$U_x \varphi = \{v \in \mathbb{R}^2,\ \exists (x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R} \setminus \{x\},\ \lim_{n \to +\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \Delta_{x_n} \varphi = v\}$$

et on définit l'espace tangent au graphe de $\varphi$ en $x$ par: $T_x \varphi = \cup_{v \in U_x \varphi} \mathbb{R} v$.

1. On note $\mathrm{pr}_1$ la projection sur la première coordonnée: $\mathrm{pr}_1(u) = u_1$, $\forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathrm{pr}_1(T_x \varphi) = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   *Indication:* On pourra remarquer que $\forall y \neq x$, $|\Delta_y \varphi| = 1$.

2. On définit le cône horizontal $H^\gamma$ par:

   $$H^\gamma := \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ |u_2| \leq \gamma |u_1|\}.$$

   Montrer que: $T_x \varphi \subset H^\gamma$.

3. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $\phi(x) = \dfrac{x}{2} \sin(\ln(|x|))$. Peut-on trouver $\gamma > 0$ tel que $\phi \in \mathcal{L}_\gamma$? Expliciter $T_0 \phi$.

4. On suppose $\gamma \leq 1$. Montrer que si $T_x \varphi$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$, alors $\varphi$ est dérivable en $x$.

# Exercice 2

1. Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et soit $I = ]a, b[$. Soit $f \in \mathcal{C}_I := \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On suppose que $f$ admet 0 pour unique point critique, que ce point critique est non dégénéré, que $f(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

(a) Etudier les variations de $f$.

(b) On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f''(xu)\,du, \quad \forall x \in I.$

Montrer que $f(x) = x^2 g(x)$, $\forall x \in I$.

(c) Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g > 0$ sur $I$.

(d) Construire une fonction $h$ croissante et de classse $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ telle que $\forall x \in I, \quad f(x) = h(x)^2$. Montrer que $h$ est un difféomorphisme, appelé racine carrée de $f$, de $I$ sur un intervalle $J$ qu'on précisera en fonction de $f$.

2. On dit que deux parties $A$, $B$ du plan $\mathbb{R}^2$ sont de même type s'il existe deux intervalles ouverts $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ et un difféomorphisme $\phi : I^2 \to J^2$ tels que $A \subset I^2$, $B \subset J^2$ et $\phi(A) = B$.

Un entier $n > 0$ étant fixé, on se donne $n$ réels $a_0 < \cdots < a_n$ tels que les sommes $a_i + a_j$, $i \leq j$, soient toutes distinctes.

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:

- $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- $f$ possède exactement $n$ points critiques $x_0(f) < \cdots < x_{n-1}(f)$ et ils sont tous non dégénérés;
- les valeurs critiques de $f$ sont $a_0, \cdots, a_{n-1}$; autrement dit, il exste une permutation $\sigma_f$ de $a_0, \cdots, a_{n-1}$, appelée permutation associée à $f$, telle que $f(x_i(f)) = \sigma_f(a_i)$, $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty.$

Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $x_0, \cdots, x_{n-1}$ les points critiques de $f$. De même, la notation $\mathcal{A}_n$ est en réalité une abréviation pour $\mathcal{A}_n(a_0, \cdots, a_{n-1})$.

On définit:

$$\forall f \in \mathcal{A}_n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad E_\lambda(f) = \{(x,y) \in I^2,\ f(x) + f(y) = \lambda\}.$$

(a) Soit $f \in \mathcal{A}_n$. Préciser les variations de $f$ suivant la parité de $n$.

(b) i. Montrer que la relation $\sim$ définie par: $f \sim g$ si et seulement si il existe un difféomorphisme croissant $h$ de $\mathbb{R}$ tel que $f = g \circ h$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}_n$.

ii. Montrer que si $f \sim g$, alors $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(g)$ sont de même type, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $h$ un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathcal{A}_n \iff f \circ h \in \mathcal{A}_n$ et qu'alors $\sigma_f = \sigma_{f\circ h}$.

(d) Réciproquement, on suppose que $f$ et $g$ sont deux éléments de $\mathcal{A}_n$ tels que $\sigma_f = \sigma_g$.

i. Montrer qu'il existe une unique bijection $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f = g \circ h$ et $h(x_k(f)) = x_k(g)$, $\forall k \in \{0, \cdots, n-1\}$.

ii. En utilisant la question 1, montrer que $h$ est un difféomorphisme.

# Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(a) Montrer que

$$\forall a < b < c \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée à gauche $f'_g(x)$ et la dérivée à droite $f'_d(x)$ de $f$ en $x$ existent, que $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ et que si $x_1 < x_2$, alors: $\forall x_1 < x_2 \in \mathbb{R}, \quad f'_g(x_1) \leq f'_d(x_1) \leq f'_g(x_2)$.

(c) Montrer que $f$ est continue et que le sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ où $f$ n'est pas dérivable est fini ou dénombrable.

*Indication*: Vérifier l'existence de $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$ telle que $\forall x \in \mathcal{S}$, $\psi(x) \in ]f'_g(x), f'_d(x)[$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $\tau : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tau(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}.$$

Montrer que $\tau$ est impaire est croissante sur $\mathbb{R}^*$, puis que $f$ est dérivable en $x$ si et seulement si $\lim_{t\to 0^+} \tau(t) = 0$.

2. Soit $n \geq 1$ et soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe tel que $-x \in C$, $\forall x \in C$ et soit $F : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que $F(0) = 0$ et que $F$ est majorée sur $C$. Montrer que: $\sup_{x\in C} F(x) = \sup_{x\in C} |F(x)|$.

3. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $\alpha > 0$. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que
   $$\sup_{\|h\|_1 \leq \alpha} g(x+h) - g(x) = \max_{1 \leq i \leq n, |\varepsilon|=1} g(x + \varepsilon \alpha e_i) - g(x).$$
   (b) Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
4. On pose: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t > 0$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$,
   $$O_{k,i}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{g(x+te_i) + g(x-te_i) - 2g(x)}{t} < \frac{1}{k} \right\},$$
   (a) Montrer que $V_{k,i} = \cup_{t>0} O_{k,i}(t)$ est ouvert.
   (b) Soit $\Delta_i = \cap_{k \geq 1} V_{k,i}$, $1 \leq i \leq n$. Montrer que
   $$\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \text{ existe}\}.$$
   (c) Montrer que $\Delta_i$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$.
   *Indication*: Utiliser 1.c.
5. Montrer que $\Omega_g := \cap_{1 \leq i \leq n} \Delta_i$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.
   *Indication*: Remarquer que $\Delta_i$ est une intersection dénombrable d'ouverts.
6. Soit $x \in \Omega_g$. On définit $G$ par
   $$G(y) = g(y) - g(x) - \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$
   (a) Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^n$,
   $$|G(x+h)| \leq \max_{1 \leq i \leq n, |\varepsilon|=1} G(x + \varepsilon \|h\|_1 e_i)$$
   (b) En déduire que $\Omega_g$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ en lesquels $g$ est différentiable.