Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2015–2016

Séparabilité du dual. Difféomorphismes

Exercice 1

1. Soit $0 < a < b < 1$ et soit V un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ tel que tout $f \in V$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On définit:

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y, \quad \forall f \in V, \quad \xi_{(x,y)}(f) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

   (a) Montrer que $\xi_{(x,y)} \in V^*$.

   (b) Montrer que

$$\forall f \in V, \qquad \sup_{(x,y)\in[a,b]^2,\ x\neq y} |\xi_{(x,y)}(f)| < +\infty$$

   (c) Montrer qu'il existe $\mathcal{N}(a,b) > 0$ tel que:

$$\forall f \in V, \quad \forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \mathcal{N}(a,b)|x-y|\|f\|_\infty.$$

   (d) Soit $(t_\ell)_{0\leq L}$ une suite finie de points de $[a,b]$ tels que

$$0 < t_{\ell+1} - t_\ell \leq \frac{1}{\mathcal{N}(a,b)} \quad 0 \leq \ell < L \quad \text{et} \quad t_0 = a, \quad t_L = b.$$

   Montrer que

$$\forall f \in V, \quad \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \leq \sup_{0\leq \ell \leq L} |f(t_\ell)| + \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

2. Soit F_0 un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ tel que tout $f \in F_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que F_0 est de dimension finie.

3. Soit X_0 un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}([0,1])$ tel que tout $f \in X_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(a) Soit $(a_j)_{j\geq 0}$, $a_j \in [0,1[$, une suite strictement croissante vers 1 et soit $(s_n)_{n\geq 0}$, $s_n \in [0,1]$, une suite strictement croissante vers 1. Soit $(n_j)_{j\geq 0}$ une suite d'entiers strictement croissante vers $+\infty$. On suppose que $s_0 = a_0 = 0$ et $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$s_{n_j} = a_j \quad \text{et} \quad \forall n \in \{n_j, \cdots, n_{j+1}-1\}, \quad s_{n+1} - s_n \leq \frac{1}{\mathcal{N}(a_j, a_{j+1})}.$$

Soit $J : f \in X_0 \mapsto (f(s_n))_{n\geq 0}$. Montrer que J prend ses valeurs dans l'espace c des suites numériques convergentes muni de la norme

$$u \in c \mapsto N_\infty(u) = \sup_{n\geq 0} |u_n|$$

et que:

$$\|f\|_\infty \leq 2N_\infty(J(f)) \leq 2\|f\|_\infty, \quad \forall f \in X_0.$$

(b) En déduire que X_0 est isomorphe à un sous-espace de c puis que X_0 est isomorphe à un sous-espace Z_0 de l'espace c_0 des suites numériques convergentes vers 0.

Indication: Utiliser l'application T qui associe à $u \in c$ la suite $(l, u_0 - l, \cdots, u_n - l, \cdots)$.

(c) Montrer que X_0^* est isomorphe à Z_0^*. En déduire que X_0^* est séparable.

Indication: On pourra s'appuyer sur le Théorème de Hahn-Banach et la propriété d'isomorphisme entre c_0^* et ℓ^1.

4. On se propose de montrer par l'absurde que $\mathcal{C}([0,1])^*$ n'est pas séparable.

(a) On pose:

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall f \in \mathcal{C}([0,1]), \quad \delta_x(f) = f(x).$$

Montrer que $\delta_x \in \mathcal{C}([0,1])^*$, $\forall x \in [0,1]$, et que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad x \neq y, \quad \|\delta_x - \delta_y\|_{\mathcal{C}([0,1])^*} = 2.$$

(b) Soit $(\omega_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans $\mathcal{C}([0,1])^*$ et soit χ l'application qui à tout $x \in [0,1]$ associe un entier n tel que $\|\delta_x - \omega_n\|_{\mathcal{C}([0,1])^*} < 1$. Montrer que χ induit une bijection de $[0,1]$ sur une partie de $\mathbb{N}$. En déduire que $\mathcal{C}([0,1])^*$ n'est pas séparable.

Exercice 2

Soit $\gamma > 0$ et soit $\mathcal{L}_\gamma$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γ-Lipschitziennes s'annulant en 0.

1. (a) Montrer que l'application

$$d_\gamma : \ (\varphi, \psi) \mapsto \sup_{x \neq 0} \frac{|\varphi(x) - \psi(x)|}{|x|}$$

   est une distance sur $\mathcal{L}_\gamma$.

   (b) Montrer que pour la métrique définie par la distance d_γ, $\mathcal{L}_\gamma$ est complet.

   (c) On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Pour toute application $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ de différentielle $dh \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ on pose:

$$|h|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |h(x)|, \quad |dh|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|dh_x\|$$

   où $\|dh_x\|$ est la norme subordonnée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$|h|_{\mathcal{C}^1} = \max(|h|_\infty, |dh|_\infty).$$

   Soit $\mu > 0$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{L}_\gamma$ tels que $|h|_{\mathcal{C}^1}(1 + \gamma) < \mu$. Montrer que l'application G_φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_\varphi(x) = \mu x + h(x, \varphi(x))$$

   est strictement croissante. En déduire que G_φ est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < \lambda < 1 < \mu$. Soit $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vérifiant $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$ et soit $f : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (\mu x + \alpha(x, y), \lambda y + \beta(x, y)).$$

   On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|\alpha|_{\mathcal{C}^1} < \delta$ et $|\beta|_{\mathcal{C}^1} < \delta$.

   (a) Montrer que si $2\delta < \lambda$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   Indication: On pourra montrer que $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$, l'application

$$F_{(x',y')} : \ (x, y) \mapsto \left(\frac{x'}{\mu} - \frac{\alpha(x, y)}{\mu}, \frac{y'}{\lambda} - \frac{\beta(x, y)}{\lambda} \right)$$

est strictement contractante.

Dans la suite, on fixe $\gamma > 0$ vérifiant:

$$0 < \gamma < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \delta < \frac{\gamma(\mu - \lambda)}{\gamma + 2}.$$

(b) On appelle graphe d'une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'ensemble

$$H\varphi = \{(x, \varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{L}_\gamma$ il existe une unique application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(H\varphi) = H\psi$. On note $f_* : \varphi \mapsto \psi$ l'application ainsi définie.

(c) Montrer que f_* est une application de $\mathcal{L}_\gamma \to \mathcal{L}_\gamma$.

(d) Montrer que $\forall \varphi, \varphi' \in \mathcal{L}_\gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$|f_*(\varphi)(G_\varphi(x)) - f_*(\varphi')(G_\varphi(x))| \leq (\lambda + \delta(1+\gamma))|\varphi(x) - \varphi'(x)|.$$

où l'on a posé:

$$G_\varphi(x) = \mu x + \alpha(x, \varphi(x)).$$

(e) En déduire qu'il existe une application $\varphi^+ \in \mathcal{L}_\gamma$ dont le graphe $H\varphi^+$ est invariant par f.

(f) Montrer que

$$|f(x, \varphi^+(x))| \geq (\mu - \delta)|(x, \varphi^+(x))|.$$

(g) Montrer que si $\delta > 0$ est suffisamment petit et si $\gamma > 0$ est convenablement choisi, alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} |f^{-n}(x, \varphi^+(x))| = 0.$$