Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2015–2016

Notions de mesures. Polynômes trigonométriques

Exercice 1

Soit $n \geq 3$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien usuel défini par:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

La norme euclidienne associée est notée:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Pour toute partie $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$, on définit le cône engendré par A comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{tx,\ (t, x) \in [0, 1] \times A\}.$$

Lorsque $\mathcal{C}(A)$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue λ_n, on définit:

$$\lambda_S(A) = \frac{\lambda_n(\mathcal{C}(A))}{\lambda_n(B^n)}$$

En particulier: $\lambda_S(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$. On admet que les images réciproques de boréliens de $\mathbb{R}$ par des restrictions à $\mathbb{S}^{n-1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ sont mesurables.

1. Montrer que pour tout $h > 0$, on a

$$\lambda_S\left(\mathbb{S}^{n-1} \cap ([-h, h] \times [-1, 1]^{n-1})\right) \leq \frac{2^n h}{\lambda_n(B^n)}$$

2. Montrer que λ_S est invariante par rotation, i.e.: pour toute rotation vectorielle r de $\mathbb{R}^n$ et pour toute partie mesurable $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$, on a $\lambda_S(r(A)) = \lambda_S(A)$.

3. Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$, on définit le quartier de disque $\Omega_{\alpha,\beta}$:

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta),\ r \in [0,1],\ \theta \in [\alpha,\beta]\}$$

puis le quartier de sphère $Q_{\alpha,\beta}$:

$$Q_{\alpha,\beta} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in S^{n-1},\ (x_1, x_2) \in \Omega_{\alpha,\beta}\}.$$

Vérifier que:

$$\forall (\theta,\theta') \in \{(\theta,\theta') \in \mathbb{R}_+^2,\ 0 \leq \theta+\theta' \leq 2\pi\}, \quad \lambda_S(Q_{0,\theta+\theta'}) = \lambda_S(Q_{0,\theta}) + \lambda_S(Q_{0,\theta'}).$$

En déduire que:

$$\lambda_S(Q_{\alpha,\beta}) = \frac{\beta-\alpha}{2\pi}.$$

4. Soit $a, b \in \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de a et b telle que:

$$\|b-a\| - K\|b-a\|^2 \leq \mathrm{Arccos}(\langle a,b\rangle) \leq \|b-a\| + K\|b-a\|^2.$$

5. Soit $\theta \in [0,\pi]$. On considère les deux points de $\mathbb{S}^{n-1}$ définis par:

$$a = (1, 0, \cdots, 0), \quad b = (\cos\theta, \sin\theta, 0 \cdots, 0).$$

Déterminer en fonction de θ la quantité:

$$\lambda_S\left(\{x \in \mathbb{S}^{n-1},\ \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle \leq 0\}\right).$$

En déduire que si a et b sont quelconques dans $\mathbb{S}^{n-1}$:

$$\lambda_S\left(\{x \in \mathbb{S}^{n-1},\ \langle x,a\rangle\langle x,b\rangle \leq 0\}\right) = \frac{\mathrm{Arccos}\langle a,b\rangle}{\pi}$$

6. Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une fonction de classse $\mathcal{C}^2$ sur un segment $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$. Pour tout $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, on définit le nombre de passages orthogonaux en a pendant l'intervalle $J \subset I$ par

$$N_J(a) = \mathrm{card}\{t \in J \mid a \perp \gamma(t)\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

On admet la mesurabilité des fonctions N_J et on se place dans le cas où il existe $M > 0$ tel que $N_I(a) \leq M$, $\forall a \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(a) Soit $a \in \mathbb{S}^{(n-1)}$, $h > 0$. Montrer que si $\langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle \leq 0$, alors $N_{[t,t+h]}(a) \geq 1$.

(b) Montrer que si $N_{[t,t+h]}(a) \geq 2$, alors il existe $c \in [t, t+h]$ tel que $a \perp \gamma'(c)$. En déduire que: $|\langle a, \gamma(t)\rangle| \leq h^2\|\gamma''\|_\infty$.

(c) Montrer la même inégalité lorsque $\langle a, \gamma(t)\rangle\langle a, \gamma(t+h)\rangle > 0$ et $N_{[t,t+h]}(a) \geq 1$.

7. On définit l'aire orthogonale balayée par γ par:

$$\mathcal{A}_I = \int_{a\in\mathbb{S}^{(n-1)}} N_I(a)\, d\lambda_S(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda_S(N_I^{-1}(k)).$$

(a) Déduire des résultats précédents qu'il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de t telles que

$$\left|\lambda_S(N_{[t,t+h]}^{-1}(1)) - \frac{1}{\pi}\text{Arccos}(\langle\gamma(t), \gamma(t+h)\rangle)\right| \leq C_1 h^2$$

$$\left|\mathcal{A}_{[t,t+h]} - \frac{1}{\pi}\|\gamma(t) - \gamma(t+h)\|\right| \leq C_2 h^2.$$

(b) Montrer que $\mathcal{A}_I = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_I \|\gamma'(t)\|\, dt$.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel complexe $V = \mathcal{C}^2([-1,1], \mathbb{C})$. Pour tout $f \in V$, soit $D(f) : [-1,1] \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\forall x \in [-1,1], \quad D(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note V_λ le sous-espace de V défini par

$$V_\lambda = \{f \in V,\ D(f) = \lambda f\}.$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$ de dérivée $n$ième $U_n^{(n)} =: P_n$. Montrer que $(X^2-1)U_n' = 2nXU_n$.

(b) En déduire que $L_n = \dfrac{P_n}{2^n n!}$ vérifie: $D(L_n) = -n(n+1)L_n$.

2. Soit $f, g \in V$. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} D(f)(t)g(t)\ dt = \int_{-1}^{1} f(t)D(g)(t)\ dt$$

3. Soit $\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C},\ V_\lambda \neq \{0\}\}$. Montrer que

$$\Sigma = \{-n(n+1),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $V_{-n(n+1)} = \mathbb{C}\ L_n$.

   Indication: On pourra calculer le Wronskien de deux solutions de l'équation différentielle: $(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$.

5. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des applications $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [-1,1], \mathbb{C})$ solutions de

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1], \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = (1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

   Montrer que les éléments de $\mathcal{E}$ de la forme $(t,x) \mapsto a(t)b(x)$ avec $a, b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [-1,1], \mathbb{C})$ sont les applications

$$(t,x) \mapsto L_n(x)\left(\alpha e^{i\sqrt{n(n+1)}t} + \beta e^{-i\sqrt{n(n+1)}t}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,$$

   et les applications: $(t,x) \mapsto \lambda t + \mu, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ en posant:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}.$$

1. Montrer que

$$\|p'\|_\infty \leq \frac{n(n+1)}{2}\|p\|_\infty.$$

2. Montrer qu'il existe un segment $S \subset \mathbb{R}$ de longueur $\dfrac{2}{n(n+1)}$ tel que $\forall t \in S,\ |p(t)| \geq \dfrac{\|p\|_\infty}{2}$.