Compléments au Problème d'Analyse 2017

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

5 novembre 2017

1 Construction d'espaces de Hilbert

1.1 Prolongement par densité des opérateurs linéaires continus

On rappelle le théorème fondamental :

Théorème

Soient V et F des espaces de Hilbert, $\mathcal{D}$ un sous-espace dense dans V, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, F)$ une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue $\tilde{A} \in \mathcal{L}(V, F)$ qui prolonge A. Ce prolongement vérifie : $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Démonstration

Soit $x \in V$ et soit $(x_n)_n \in \mathcal{D}$, $x_n \to x$. Par continuité de A :

$$\|Ax_{n+p} - Ax_n\| \leq \|A\| \|x_{n+p} - x_n\|, \quad \forall n, p \geq 0$$

de sorte que la suite $(Ax_n)_n$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc convergente vers une limite notée y_x. Si $Ax'_n \to y'_x$ pour une autre suite $(x'_n)_n \in \mathcal{D}$ t.q. $x'_n \to x$, alors

$$\|Ax_n - Ax'_n\| \leq \|A\| \|x_n - x'_n\| \to 0$$

et alors $y_x = y'_x$ ne dépend pas du choix de la suite (x_n) qui converge vers x. On note $\tilde{A}x = y_x$ cette limite et on définit ainsi une application linéaire $V \to F$. En particulier :

$$\frac{\|\tilde{A}x\|}{\|x\|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \leq \|A\|, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall x_n \to x.$$

Donc $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$ et comme la restriction de $\tilde{A}$ à $\mathcal{D}$ coïncide avec A, on en déduit que $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Pour vérifier l'unicité du prolongement, on remarque que si $\tilde{A}^\sharp$ est un autre prolongement de A et si $\mathcal{D} \ni x_n \to x$, alors

$$\|\tilde{A}x - \tilde{A}^\sharp x\| \leq \|\tilde{A}x - Ax_n\| + \|Ax_n - \tilde{A}^\sharp x\| \to 0$$

i.e. : $\tilde{A}x = \tilde{A}^\sharp x$.

Remarque

Le théorème de prolongement reste vrai si A est une application non linéare uniformément continue et si V et F sont des espaces de Banach.

1.2 Critère de densité

Théorème

Soit D un sous-ensemble d'un espace de Hilbert V. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le sous-espace vectoriel engendré par D est dense dans V.
2. Toute forme linéaire continue sur V nulle sur D est nulle sur V.

Démonstration

$\Rightarrow$ On suppose que $\overline{\text{V}ect(D)} = V$. Soit $f \in V^*$ nulle sur D et soit $x \in V$. Par hyposthèses, il existe une suite $(x_n)_n \in D$ t.q. : $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. IAlors, la continuité de f entraîne :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0,$$

i.e. : $f = 0$.

$\Leftarrow$ On suppose que $M := \overline{\text{V}ect(D)} \subsetneq V$. Soit alors $x_0 \in V$, $x_0 \notin M$ et soit p_M le projecteur orthogonal sur M, qui est bien défini car M est un sous-espace vectoriel fermé de V. Soit $f \in V^*$ définie à l'aide du produit scaaire $(\cdot, \cdot)$ sur V par :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (x_0 - p_M(x_0), x).$$

On a alors : $f|_D = 0$ car $D \subset M$ et $x_0 - p_M(x_0) \in M^\perp$. On en déduit que $f \equiv 0$ sur V, ce qui contredit l'égalité $f(x_0) = \|x_0 - p_M(x_0)\|2 > 0$ car $x_0 \notin M$.

Définition

Soit V un espace de Hilbert. Si $M \subset V$ et un sous-ensemble de V, on pose :

$$M^\perp = \{f \in V^* \mid \quad \langle f, x \rangle = 0, \quad \forall x \in M\}$$

Corollaire

Le sous-espace vectoriel engendré par un sous-ensemble $D \subset V$ est dense dans V ssi $D^\perp = \{0\}$.

Proposition

Soient V_1 et V_2 deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Alors

1. $\mathrm{K}er(A) = (\mathrm{Im}(A^*)^\perp$
2. $\mathrm{K}er(A^*) = (\mathrm{Im}(A)^\perp$

Démonstration

Par définition de $\mathrm{K}er(A)$ et $\mathrm{K}er(A^*)$:

$$x_1 \in \mathrm{K}er(A) \iff Ax_1 = 0 \iff \forall x_2 \in V_2, \quad \langle Ax, x_2 \rangle = 0$$

$$\iff \forall x_2 \in V_2, \quad \langle x, A^* x_2 \rangle = 0 \iff x_1 \in (\mathrm{Im}(A^*)^\perp.$$

$$f_2 \in \mathrm{K}er(A^*) \iff A^* f_2 = 0 \iff \forall x_1 \in V_1, \quad \langle A^* f_2, x_1 \rangle = 0$$

$$\iff \forall x_1 \in V_1, \quad \langle f_2, Ax_1 \rangle = 0 \iff f_2 \in (\mathrm{Im}(A)^\perp.$$

Remarque

Cette Proposition reste vraie dans le cas des espaces de Banach.

Définition

Soit V un espace de Hilbert. Si $M \subset V^*$ et un sous-ensemble de V^*, on pose :

$$M^\perp = \{x \in V \mid \quad \langle f, x\rangle = 0, \quad \forall f \in V^*\}$$

Corollaire

Soient V_1 et V_2 deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Alors

1. $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{K}er(A^*)^\perp$
2. $\overline{\mathrm{Im}(A^*)} = \mathrm{K}er(A)^\perp$

Démonstration

C'est une conséquence directe de la propriété : $\forall M \subset V$, $M^{\perp\perp}$ est le sous-espace vectoriel fermé $\overline{\mathrm{V}ect(M)}$ engendré par M.

En effet, $M \subset M^{\perp\perp}$ de façon immédiate. Comme $M^{\perp\perp}$ est un espace vectoriel fermé, on a aussi : $\overline{\mathrm{V}ect(M)} \subset M^{\perp\perp}$.

Réciproquement, soit $x_0 \in M^{\perp\perp}$ et soit p_M le projecteur orthogonal sur $\overline{\mathrm{V}ect(M)}$. Soit $f \in V^*$ définie par :

$$f(x) = (x_0 - p_M(x_0), x), \quad \forall x \in V.$$

Par construction : $f = 0$ sur M, i.e. : $f \in M^\perp$. Par hypothèse sur x_0 : $f(x_0) = 0$, i.e., compte tenu de la définition de f : $\|x_0 - p_M(x_0)\| = 0$, et donc $x_0 \in \overline{\mathrm{V}ect(M)}$.

Remarques

La première assertion reste vraie dans le cas des espaces de Banach. La deuxème assertion reste vraie dans le cas des espaces de Banach *réflexifs* et est fausse dans le cas des espaces de Banach non réflexifs.

Théorème

Soient V_1 et V_2 deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Alors A a une image dense dans V_2 ssi $A^* \in \mathcal{L}(V_2^*, V_1^*)$ est injectif, A est injectif ssi A^* a une image dense dans V_1^*.

Démonstration

Du critère de densité et de la Proposition, on déduit que

$$\overline{\mathrm{Im}(A)} = V_2 \iff (\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \{0\} \iff \mathrm{K}er(A^*) = \{0\},$$

et

$$\mathrm{K}er(A) = \{0\} \iff (\mathrm{Im}(A^*))^{\perp} = \{0\} \iff \overline{\mathrm{Im}(A^*)} = V_1^*.$$

Remarques

Les assertions du Théorème s'étendent au cas des espaces de *Banach réflexifs*. La deuxième partie est fausse si V_1 n'est pas réflexif.

Définition

Soient V_1 et V_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire continu $j \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ est appelé un plongement de V_1 dans V_2 si j est injectif et si d'image $j(V_2)$ dense dans V_2.

Proposition

Soit V_1 et soit V_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire continu $j \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ est un plongement ssi le trasposé $j^* \in \mathcal{L}(V_2^*, V_1^*)$ est aussi un plongement.

Démonstration

Par définition, $j \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ est un plongement ssi

$$\begin{aligned} \mathrm{K}er(j) = \{0\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{Im}(j)} = V_2 &\iff \mathrm{Im}(j^*)^{\perp} = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(j)^{\perp} = \{0\} \\ &\iff \overline{\mathrm{Im}(j^*)} = V_1^* \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{K}er(j^*)} = \{0\} \\ &\iff \overline{\mathrm{Im}(j^*)} = V_1^* \quad \text{et} \quad \mathrm{K}er(j^*) = \{0\} \end{aligned}$$

car $\mathrm{K}er(j^*)$ est fermé.

1.3 Dual d'un espace de Hilbert

Soit$V$ un espave préhilbertien pour un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et soit $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ son dual topologique, espace des applications linéaires continues : $V \to \mathbb{R}$, muni de la norme duale : $\|f\|_* = \sup\limits_{x \in V} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$. On rappelle que $(V^*, \|\cdot\|_*)$ est un espace de Banach.

Proposition

Soit V un espace préhilbertien. L'application $x \in V \mapsto \dfrac{1}{2}\|f(x)\|^2$ est différentiable sur V et sa différentielle J est une isométrie de V dans son dual V^*.

Démonstration

Soit $x, h \in V$. De l'égalité :

$$\|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2(h,x) + \|h\|^2$$

on déduit que si $h \neq 0$:

$$\frac{\|x+h\|^2 - \|x\|^2 - 2(h,x)}{\|h\|} = \|h\| \to 0$$

i.e. : l'application $x \in V \mapsto \dfrac{1}{2}\|f(x)\|^2$ est différentiable sur V, la différentielle $J_x \in V^*$ en $x \in V$ étant l'application linéaire continue $J_x : \ V \to \mathbb{R}$, $h \in V \mapsto J_x(h) = (x,h)$. De plus :

$$\frac{|J_x(h)|}{\|h\|} = \frac{|(x,h)|}{\|h\|} \leq \|x\| \quad \text{et} \quad \frac{|J_x(x)|}{\|x\|} = \|x\|$$

d'où : $\|J_x\| = \|x\|$.

Définition

L'isométrie $J \in \mathcal{L}(V, V^*)$ est appelée opérateur de dualité de V sur son dual V^*.

Théorème

Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et soit $J \in \mathcal{L}(V, V^*)$ l'opérateur de dualité. Alors J est une isométrie surjective de V sur V^* et l'espace dual V^* est n espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f,g)_* = (J^{-1}f, J^{-1}g) = f(J^{-1}g).$$

Démonstration

Soit $f \in V^*$, $f \neq 0$, et soit $x \in V$ t.q. : $f(x) \neq 0$. On remarque que $H = \mathrm{K}er f$ est un hyperplan fermé. Soit $x \in V$, $x \neq 0$, t.q. : $H = \mathrm{V}ect\{x\}^\perp$ et soit p_H la projection orthogonale sur H. On a :

$$\forall h \in V, \quad h - p_H(h) \in H^\perp = \overline{\mathrm{V}ect\{x\}} = \mathrm{V}ect\{x\},$$

i.e., comme $(x, h) = (x, h - p_H(h))$:

$$h - p_H(h) = \frac{(x, h)}{\|x\|^2} x.$$

De plus :

$$f(h) = f(h - p_H(h)) = \frac{(x, h)}{\|x\|^2} f(x)$$

donc $f = J_{\tilde{x}}$ avec

$$\tilde{x} = \frac{f(x)}{\|x\|^2}$$

et J est surjective. Comme J est aussi injective par définition d'un produit scalaire, on en déduit que $(f, g)_*$ est bien défini pour tout $(f, g) \in V^* \times V^*$. On vérifie directement que c'est un produit scalaire sur V^* de norme associée la norme duale $\| \cdot \|_*$ pour laquelle il est complet. En effet : :

$$\sqrt{(f, f)_*} = \|J^{-1}(f)\| = \|f\|_*$$

d'après les calculs faits.

Donc V^* est un espace de Hilbert.

Définition

On appelle complété d'un espace préhilbertien V tout couple $(\tilde{V}, j)$ formé d'un espace de Hilbert $\tilde{V}$ et d'une isométrie j de V sur $\tilde{V}$ t.q. $j(V)$ est dense dans $\tilde{V}$.

Remarques

Du théorème de prolongement par densité des applications linéaires continues on déduit que tout espace de Hilbert F, tout opérateur linéaire continu $A \in \mathcal{L}(V, F)$ se prolonge en un unique opérateur linéaire continu $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\tilde{V}, F)$.

Les complétés d'un espace préhilbertien V sont uniques à un isomorphisme près. En effet, si $(\tilde{V}_1, j_1)$ et $(\tilde{V}_2, j_2)$ sont deux complétés de V, alors $j_1 \in \mathcal{L}(V, \tilde{V}_1)$ se prolonge de façon unique en une isométrie surjctive $\tilde{j}_1 \in \mathcal{L}(\tilde{V}_2, \tilde{V}_1)$ d'inverse le prolongement $\tilde{j}_2 \in \mathcal{L}(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ car $j_1(V)$, resp. $j_2(V)$, est dense dans $\tilde{V}_1$, resp. $\tilde{V}_2$.

1.4 Transposition d'opérateurs

Proposition

Soit V_1, V_2 deux espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ un opérateur lin'eaire continu. L'opérateur linéaire $A^* \in \mathcal{L}(V_1^*, V_2^*)$ défini par

$$\langle A^* f_2, x_1 \rangle = \langle f_2, Ax_1 \rangle, \quad \forall f_2 \in V_2^*, \quad \forall x_1 \in V_1$$

est continu et vérifie : $\|A^*\| = \|A\|$.

Démonstration

On vérifie immédiatement que A^* est linéaire et envoie V_2^* sur V_1^*. On a

$$\|A^*\| = \sup_{f_2 \in V_2^*} \frac{\|A^* f_2\|_*}{\|f_2\|_*} = \sup_{f_2 \in V_2^*} \sup_{x_1 \in V_1} \frac{|\langle A^* f_2, x_1 \rangle|}{\|f_2\|_* \|x_1\|} =$$

$$= \sup_{x_1 \in V_1} \sup_{f_2 \in V_2^*} \frac{|\langle f_2, Ax_1 \rangle|}{\|f_2\|_* \|x_1\|} = \sup_{x_1 \in V_1} \frac{\|Ax_1\|}{\|x_1\|} = \|A\|.$$

1.5 Transposition d'opérateurs injectifs

Démonstration

On vérifie immédiatement que A^* est linéaire et envoie V_2^* sur V_1^*. On a

$$\|A^*\| = \sup_{f_2 \in V_2^*} \frac{\|A^* f_2\|_*}{\|f_2\|_*} = \sup_{f_2 \in V_2^*} \sup_{x_1 \in V_1} \frac{|\langle A^* f_2, x_1 \rangle|}{\|f_2\|_* \|x_1\|} =$$

$$= \sup_{x_1 \in V_1} \sup_{f_2 \in V_2^*} \frac{|\langle f_2, Ax_1 \rangle|}{\|f_2\|_* \|x_1\|} = \sup_{x_1 \in V_1} \frac{\|Ax_1\|}{\|x_1\|} = \|A\|.$$

1.6 Produit scalaire dérivé

Proposition

Soit V un espace vectoriel et soit F un espace de Hilbert de produit scalaire $(\cdot, \cdot)_F$. Soit $A \in \mathcal{L}(V, F)$ un opérateur linéaire continu injectif d'image fermée dans F. Si K désigne l'opérateur de dualité de F sur F^*, alors V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire dit initial :

$$(x, y) = (Ax, Ay)_F, \quad \forall (x, y) \in V \times V.$$

De plus, l'opérateur de dualité de V sur V^* est $J = A^* K A$ et A est une isométrie de V dans F.

Démonstration

De l'injectivité de A, on dédut qe $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur V et A est une isométrie de V dans F lorsque V est muni de la norme associée. Comme l'image de A est fermée, V est complet. En effet, si $(x_n)_n$ est de Cauchy dans V, alors $(Ax_n)_n$ est de Cauchy dans F qui est complet donc $(Ax_n)_n$ converge dans F vers une limite y_* qui est dans $\mathrm{Im}(A)$ car $\mathrm{Im}(A)$ est fermé par hypothèse. Soit $x_* \in V$ t.q. $y = Ax_*$. Alors $x_n \to x_*$ dans V. On a, par définition de K : $\forall (x, y) \in V \times V$,

$$(x, y) = (Ax, Ay)_F = \langle KAx, Ky \rangle = \langle A^* K A x, y \rangle$$

ce qui montre que l'opérateur d'isométrie entre V et V^* est $J = A^* K A$.

1.7 Sous-espaces normaux d'une espace pivot

On considère un espace vectoriel $\mathcal{D}$ muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. On note H le complété de $\mathcal{D}$ pour $(\cdot, \cdot)$ et on convient d'identifier H avec son dual i.e. que H est choici comme espace pivot.

Définition

Pour tout espace de Hilbert V contenant $\mathcal{D}$ et plongé dans H, on appelle espace normal associé à V l'adhérence $V_0 := \overline{\mathcal{D}}^V$ de $\mathcal{D}$ dans V. Si $V = V_0$, alors V est dit normal.

On note j et j_0 les injections canoniques de V et de V_0 dans H respectivement. Alors, les transposés j^* et j_0^* sont des plongements de H dans V^* et dans V_0^* respectivement. On choisit d'identifier $j_0^* \in \mathcal{L}(H, V_0^*)$ à une injection canonique, i.e. H à un sous-espace dense de V_0^*.

1.8 Domaines minimal et maximal d'ne famille fermée d'opérateurs

Soit $\mathcal{A} = (A_p)_{p\in P} \in\in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ une famille finie d'opérateurs linéaires de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$.

Définition

On dit que la famille $\mathcal{A}$ est fermée si $\forall (\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ t.q. $\varphi_n \to 0$ dans H, si $A_p\varphi_n \to f_p$ dans H, $\forall p \in P$, alors $f_p = 0$, $\forall p \in P$

On associe à la famille $\mathcal{A}$ le produit scalaire sur $\mathcal{D}$ défini par :

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{A}} := \sum_{p\in P} (A_p\varphi, A_p\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}$$

qui est un produit scalaire initial.

Plus g'enéralement, si $Q \subset P$ et si $\mathcal{B} = (A_p)_{p\in Q}$, on définit aussi le produit scalaire :

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{B}} := \sum_{p\in Q} (A_p\varphi, A_p\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Proposition

Si $\mathcal{A} = (A_p)_{p\in P} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ est une famille fermée d'opérateurs de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. Il existe des complétés $H_0(\mathcal{A})$ et $H_0(\mathcal{B})$ de $\mathcal{D}$ pour les produits scalaires $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{A}}$ et $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{B}}$ resp. t.q. : $H_0(\mathcal{A}) \subset H_0(\mathcal{B}) \subset H$ les injections étant des plongements.

Démonstration

Par construction, $H_0(\mathcal{A})$ est un complété de $\mathcal{D}$ pour le prduit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{A}}$. Soit θ l'injection canonique de $\mathcal{D}$ dans $H_0(\mathcal{A})$ et soit j l'injection canonique continue de $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ dans $(H, \|\cdot\|)$. On note $\tilde{j} \in \mathcal{L}(H_0(\mathcal{A}), H)$ l'unique prolongement par densité de $j \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, H)$. Par construction, $\tilde{j}$ est continue de $(H_0(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ dans $(H, \|\cdot\|)$ et à image dense. I reste à montrer que $\tilde{j}$ est injective. Soit $\varphi \in H_0(\mathcal{A})$ t.q. $j(\varphi) = 0$ et soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ t.q. $\|\theta(\varphi_n) - \varphi\|_{\mathcal{A}} \to 0$. L'injection canonique θ étant une isométrie de $\mathcal{D}$ dans $H_0(\mathcal{A})$, on en déduit que $(\varphi_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $H_0(\mathcal{A})$ qui est complet, donc convergente dans $H_0(\mathcal{A})$ vers un $\varphi_* \in H_0(\mathcal{A})$. Cela signifie que : $\varphi_n \to \varphi_*$ dans H et que $A_p\varphi_n \to A_p\varphi_*$ dans H, $\forall p \in P$. De plus : $\varphi_n = j(\varphi_n) = \tilde{j} \circ \theta(\varphi_n)$, $\forall n \geq 0$, et $\tilde{j}$ est continue, de $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$ dans $(H, \|\cdot\|)$

donc $\|\varphi_n - \tilde{j}\varphi\| = \|\varphi_n\| \to 0$. i.e. $\varphi_n \to 0$ dans H. La famille $\mathcal{A}$ est fermée et $A_p\varphi_n \to A_p\varphi_*$ dans H, $\forall p \in P$, donc $A_p\varphi_* = 0$, $\forall p \in P$. Finalement : $\varphi_n \to 0$ dans $H_0(\mathcal{A})$, i.e. $\varphi = 0$. En remplaçant $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ et H par $H_0(\mathcal{A})$, on montre de même que θ se prolonge en un unique prolongement continu $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}(H0(\mathcal{B}), H_0(\mathcal{A}))$ de $H_0(\mathcal{B})$ dans $H_0(\mathcal{A})$.

Définition

Soit $\mathcal{A} = (A_p)_{p\in P}$ une famille fermée d'opérateurs linéaires de D dans $\mathcal{D}$. L'espace $H_0(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}}$ est appelédomaine minimal de $\mathcal{A}$. On identifie l'unique prolongement par densité $\tilde{A}_p \in \mathcal{L}(H_0(\mathcal{A}), H)$ de A_p avec A_p en posant $\tilde{A}_p = A_p$. En particulier, le domaine minimal $H_0(\mathcal{A})$ est un espace normal.

Lemme

Soit $\mathcal{A}^*$ la famille transposée de $\mathcal{A}$ définie par

$$(A_p\varphi, \psi) = (\varphi, A_p^*\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Si $\mathcal{A}^*$ est bien définie, alors les familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont fermées.

Démonstration

Soit $\mathcal{D} \ni \varphi_n \to 0$ dans H et soit $A_p\varphi_n \to f_p$ dans H, $\forall p \in P$. Alors, par définition des A_p, $p \in P$: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$(A_p\varphi_n, \varphi) = (\varphi_n, A_p^*\varphi) \to 0$$

et donc $(f_p, \varphi) = 0$, $\forall p \in P$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$. ar densité de $\mathcal{D}$ dans H, on en déduit que $f_p = 0$, i.e. $\mathcal{A}$ est ferée. En 'echangeat les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$, on vérifie de même que $\mathcal{A}^*$ est fermée. Alors,

Proposition (Dual du domaine minimal)

Soit $\mathcal{A} = (A_p)_{p\in P}$ une famille finie d'opérateurs linéaires de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. On suppose que la famille transposée $\mathcal{A}^*$ est bien définie. Alors, $A_p^* \in \mathcal{L}(H, H_0(\mathcal{A}^*)^*)$ est l'unique prolongement de $A_p :\ \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On a :

$$((A_p^*)^* \varphi, \psi) = (\varphi, A_p^* \psi) = (A_p^* \varphi, \psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

Par définition, $\overline{\mathcal{D}}^{\mathcal{A}^*} = H_0(\mathcal{A}^*)$, i.e. $\mathcal{D}$ est dense dans $H_0(\mathcal{A}^*)$, donc $(A_p^*)^* = A_p$ dans $H_0(\mathcal{A}^*)$. Comme de plus $\overline{\mathcal{D}}^H = H$ par hypothèse, i.e. $\mathcal{D}$ est dense dans H, on en déduit que $A_p \in \mathcal{L}(H, H_0(\mathcal{A}^*)^*)$ est l'unique prolongement par densité de A_p.

Proposition (Domaine maximal)

On suppose que la famille $\mathcal{A}$ admet une transposée $\mathcal{A}^*$. Alors, le sous-espace défini par :

$$H(\mathcal{A}) := \{\phi \in H \quad \text{t.q.} \quad A_p \phi \in H, \quad \forall p \in P\}$$

muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\mathcal{A}} = (\phi, \psi) + \sum_{p \in P} (A_p \phi, A_p \psi)$$

est un espace de Hilbert contenu dans H et appelé domaine maximal de la famille $\mathcal{A}$. De plus, $H_0(\mathcal{A})$ est l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $H(\mathcal{A})$.

Démonstration

Il faut montrer que $H(\mathcal{A})$ est complet. Soit $(\varphi_n)_n \in H(\mathcal{A})$ une suite de Cauchy dans $H(\mathcal{A})$. Les suites $(\varphi_n)_n \in H(\mathcal{A})$ et $(A_p \varphi_n)_n \in H(\mathcal{A})$ sont de Cauchy dans H qui est complet, donc convergentes dans H, soit : $\varphi_n \to \varphi_*$ et $A_p \varphi_n \to f_p$ dans H, $\forall p \in P$. Comme $A_p \in \mathcal{L}(H, H_0(\mathcal{A}^*)^*)$, $\forall p \in P$, et que $H \subset H_0(\mathcal{A}^*)^*$, on en déduit que $f_p = A_p \varphi_*$, $\forall p \in P$, i.e. $\varphi_n \to \varphi_*$ dans $H(\mathcal{A})$.

1.9 Opérateurs non bornés et leurs adjoints

Définition

On considère deux espaces de Hilbert H et F. Un opérateur non borné de H dans F est un couple $(D(A), A)$ où : $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de H appelé domaine de l'opérateur et A est un opérateur linéaire de $D(A)$ dans F.

L'opérateur $(D(A), A)$ est dit fermé si : $\forall (x_n)_n \in D(A)$ t.q. $x_n \to x$ dans H et $Ax_n \to f$ dans F, on a : $f = Ax$.

L'opérateur $(D(A), A)$ est dit à domaine dense si $D(A)$ est dense dans H.

On dit que $D(A)$ est muni de la norme du graphe lorsque $D(A)$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire :

$$(x, y) = (x, y)_H + (Ax, Ay)_F, \quad \forall x, y \in D(A).$$

Proposition

Le domaine $D(A)$ d'un opérateur non borné fermé A est un espace de Hilbert pour la norme du graphe.

Démonstration

Il suffit de montrer que $D(A)$ muni de la norme du graphe est complet. Soit $(x_n)_n \in D(A)$ une suite de Cauchy pour $(\cdot, \cdot)$. Alors les suites $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont de Cauchy dans H et dans F resp. qui sont complets, donc convergentes vers $x_* \in H$ et $y_* \imath F$, soit : $x_n \to x_*$ dans H et $Ax_n \to y_*$ dans F. Come A est fermé par hypothèse, on en déduit que $y_* = Ax_*$.

Définition (Adjoint d'un opérateur non borné)

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné fermé de H dans F, i.e. soit $A \in \mathcal{L}(D(A), F)$ un opérateur linéaire continu de $D(A)$ dans F lorsque $D(A)$ est muni de la norme du graphe.

Puisque l'injection canonique $j \in \mathcal{L}(D(A), H)$ de $D(A)$ dans H est continue et à image dense dans H, c'est un plongement et $j^* \in \mathcal{L}(H^*, D(A)^*)$ est un plongement deH^* dans $D(A)^*$ que l'on peut identifierà une injection canonique.

Donc $A^* \in \mathcal{L}(F^*, D(A)^*)$ est un opérateur linéaire continu. On définit :

$$D(A^*) = \{f \in F^*, \quad A^* f \in H*\}$$

On dit que l'opérateur non borné $(D(A^*), A*)$ de F^* dans H^* est appelé l'adjoint de l'opérateur non borné à domaine dense $D(A)$.

Proposition (Adjoint d'un opérateur non borné)

L'adjoint $(D(A^*), A^*)$ d'un opérateur non borné à domaine dense $(D(A), A)$ est fermé. Il est à domaine dense si $(D(A), A)$ est fermé.

Lemme Préliminaire

L'ensemble $G(A^*) = \{(f, A^* f),\ f \in D(A^*)\} \subset F^* \times H^*$ est l'orthogonal du sous-ensemble $G(A) = \{(Ax, -x),\ x \in D(A)\} \subset F \times H$.

Démonstration du Lemme Préliminaire

Soit $(f, g) \in F^* \times H^*$. On a :

$$(f, g) \in G(A)^\perp \iff \forall \varphi \in D(A),\ {}_F\langle A\varphi, f\rangle_{F^*} - {}_H\langle \varphi, g\rangle_{H^*} = 0$$

$$\iff \forall \varphi \in D(A),\ {}_H\langle \varphi, A^* f\rangle_{H^*} - {}_H\langle \varphi, g\rangle_{H^*} = 0$$

$$\iff \forall \varphi \in D(A),\ {}_H\langle \varphi, (A^* f - g)\rangle_{H^*} = 0$$

Comme $D(A)$ est dense dans H par hypothèse, on en déduit que :

$$(f, g) \in G(A)^\perp \iff g = A^* f \quad \text{dans } H^* \iff (f, g) \in G(A^*).$$

Démonstration de la Proposition

L'opérateur non borné $(D(A^*), A^*)$ est fermé de F^* dans H^* ssi $G(A^*)$ est fermé, ce qui résulte du Lemme Préliminaire si $D(A)$ est dense dans H.

On suppose en outre que $(D(A), A)$ est fermé. Soit $y \in F = (F^*)^*$ une forme linéaire continue sur F^* nulle sur $D(A^*)$. On a : $\forall f \in D(A^*)$,

$${}_{F^*}\langle f, y\rangle_F = {}_{F^*}\langle f, y\rangle_F - {}_{F^*}\langle A^* f, 0\rangle_F = 0$$

i.e. $(y, 0) \in G(A^*)^\perp = G(A)^{\perp\perp} = \overline{G(A)} = G(A)$ car $G(A)$ est fermé par hypothèse. On déduit du Lemme Préliminaire que $y = A0 = 0$ puis que $D(A^*)$ est dense dans F^*.

Remarque

Si $(D(A), A)$ est un opérateur non borné de H dans F et si $B \in \mathcal{L}(H, F)$ est un opérateur linéaire continu, alors $(D(A), A + B)$ est un opérateur non borné, fermé, resp. à domaine dense, si $(D(A), A)$ est fermé, resp. à domaine dense.

Exemple

Soit H un espace pivot et soit V un espace de Hilbert dense dans H.

On convient d'identifier H à un sous-espace dense de V^*. Soit $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$. On lui associe l'opérateur non borné associé $(D(A), A)$ de V dans H de domaine :

$$D(A) := \{x \in V,\ Ax \in H\}.$$

Bibliographie

[1] Aubin, J.P., Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.