## Corrigé du problème de Mathématiques générales 2017

Matthieu Romagny, 12 septembre 2017

**Exercices préliminaires.**

P1 : Matrices de rang 1. Si $A$ est de rang 1, elle possède une colonne non nulle, notons-la $X$, dont toutes les autres
$\boxed{1}$ sont multiples. Soit $y_j \in K$ tel que la $j$-ème colonne est égale à $y_jX$. Alors $A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} y_1X & y_2X & \dots & y_mX \end{array} \right) = XY$,
où l'on a noté $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. De plus, $Y$ est évidemment non nulle puisque $A$ est non nulle.

Réciproquement, considérons la matrice $A = XY$ avec $X \in K^n$ et $Y \in (K^m)^*$ deux vecteurs non nuls. Soit $j$ tel
$\boxed{1}$ que $y_j \neq 0$. Toutes les colonnes de $A$ sont multiples de $X$, et la $j$-ème égale à $y_jX$ est non nulle. Ceci montre que
l'image de l'endomorphisme associé est la droite engendrée par $X$, donc $A$ est de rang 1.

Il est clair que si $X' = \lambda X$ et $Y' = \lambda^{-1}Y$ pour un certain $\lambda \in K^*$, alors $XY = X'Y'$. Comme $K^*$ est infini on
$\boxed{1}$ voit donc que l'écriture n'est jamais unique. Montrons que réciproquement, si $XY = X'Y'$ alors il existe $\lambda \in K^*$
tel que $X' = \lambda X$ et $Y' = \lambda^{-1}Y$. Nous avons vu plus haut que $X$ est un vecteur directeur de la droite image de $A$.
Comme la même chose est vraie pour $X'$, il existe $\lambda \in K^*$ tel que $X' = \lambda X$. En appliquant la même observation à la
transposée ${}^tA = {}^tY\,{}^tX$ qui est encore de rang 1, on obtient l'existence de $\mu \in K^*$ tel que ${}^tY' = \mu\,{}^tY$ donc $Y' = \mu Y$.
De $XY = X'Y' = \lambda\mu XY \neq 0$ on déduit que $\mu = \lambda^{-1}$.

*Commentaire : s'il n'y avait pas d'hypothèse sur $K$... pour $K = \mathbb{F}_2$, le groupe $K^* = \mathbb{F}_2^*$ ne contient qu'un élément, donc l'écriture sous la forme $A = XY$ est en fait unique ! Cette remarque anecdotique vous invite à faire bien attention aux spécificités des corps finis. Le même phénomène se produit lorsqu'on cherche à donner un sens précis à l'affirmation « il n'existe pas d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel et son dual », comme vous pourrez le voir dans la note « Que veut dire être canonique ? » disponible ici.*

P2 : Dual de $\mathcal{M}_{n,m}(K)$. On prend bien garde au fait que pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, l'application $f_A$ définit bien une forme
sur $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ et non sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Comme la trace est linéaire, pour tous $\lambda, \mu$ dans $K$ et pour toutes matrices
$\boxed{1}$ $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ on a $f_{\lambda A+\mu B}(M) = \lambda \operatorname{Tr}(AM) + \mu \operatorname{Tr}(BM) = (\lambda f_A + \mu f_B)(M)$. Ceci démontre que l'application
$f : \mathcal{M}_{m,n}(K) \to (\mathcal{M}_{n,m}(K))^*$ est linéaire. Montrons que de plus elle est injective. Notons $E_{r,s}$ la matrice dont le seul
$\boxed{1}$ coefficient non nul est en position $(r, s)$ et vaut 1. Le seul coefficient diagonal non nul de $AE_{r,s}$ est celui d'indice $(s, s)$
qui vaut $a_{s,r}$. Il s'ensuit que si $f_A = 0$ alors $0 = \operatorname{Tr}(AE_{r,s}) = a_{s,r}$ pour tous $r, s$. Ceci démontre que $A = 0$. Finalement
$\boxed{1}$ $f$ est linéaire, injective entre deux espaces de même dimension égale à $nm$, il s'ensuit que $f$ est bijective. C'est donc
un isomorphisme.

P3 : Matrices associées à une application linéaire donnée. (c) On sait que le rang d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ est
$\boxed{1}$ invariant par l'équivalence des matrices, c'est-à-dire est le même pour toutes les matrices $PMQ^{-1}$ avec $P \in GL_n(K)$
et $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$. Ainsi, le rang d'une application linéaire est égal à celui d'une matrice qui le représente dans des bases
$\boxed{1}$ choisies de manière quelconque (puisque changer de bases revient à remplacer la matrice par une matrice équivalente).
Ceci démontre qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ pour $E$ et $F$ telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ si et seulement si $A$ et $u$ ont même
rang.

**1. Réduction de Jordan**

1. Considérons l'application $f : K[X] \to \mathcal{L}(E)$ qui envoie un polynôme $P$ sur l'endomorphisme $P(u)$. C'est un
morphisme de $K$-algèbres. Comme il est rappelé dans l'énoncé, son noyau est l'idéal $I_u$ qui est engendré par le
$\boxed{1}$ polynôme minimal $\pi_u$ (on note que $I_u \neq 0$ car $K[X]$ est de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie). Par
définition $K[u]$ est l'image de $f$. L'isomorphisme $K[X]/\ker(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$ donne la relation $K[X]/(\pi_u) \xrightarrow{\sim} K[u]$. En
prenant les dimensions on voit que $\dim_K(K[u]) = \dim_K(K[X]/(\pi_u)) = \deg(\pi_u)$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $u$ est nilpotent, alors $v := u^p$ est nilpotent. Soit $r \geqslant 1$ son indice de nilpotence, de sorte que $v^r = 0$.
$\boxed{1}$ Alors $v$ est annulé par le polynôme $X^r$ qui est scindé, il est donc trigonalisable. Comme les valeurs propres de $v$ sont
des racines de $X^r$ elles sont toutes nulles, la trace est leur somme qui est nulle.

3.(a) Comme $\mathrm{pgcd}(X^k, Q) = 1$, il s'agit simplement du lemme des noyaux. (*Il est possible que cet argument ait été considéré comme suffisant par les correcteurs.*) Voici un peu plus de détail. Nous utiliserons constamment le fait que
les polynômes en $u$ commutent entre eux, puisque $K[u]$ est commutative. Soit $x \in E$. Comme $X^k$ et $Q$ sont premiers
$\boxed{1}$ entre eux, on peut choisir une relation de Bézout $AX^k + BQ = 1$. En évaluant en $u$ on trouve la relation

$$(\star) \quad A(u)u^k + B(u)Q(u) = \mathrm{id}_E\,.$$

Comme $\pi_u$ annule $u$, l'endomorphisme $v := A(u)u^k$ est à valeurs dans $G$ et l'endomorphisme $w := B(u)Q(u)$ est à valeurs dans $F$. En évaluant $(\star)$ sur $x$, on obtient donc $x = v(x) + w(x) \in G + F$. Par ailleurs, si $x \in F \cap G$ alors en évaluant $(\star)$ sur $x$ on trouve $0 + 0 = x$ donc $x = 0$. Ceci montre que $E$ est somme directe de $F$ et $G$. Le fait que $F$ et $G$ sont $u$-stables est général pour tout noyau $H := \ker(P(u))$ d'un polynôme en $u$, puisque $P(u)(u(x)) = u(P(u)(x)) = u(0) = 0$ si $P(u)(x) = 0$.

3.(b) Puisque $G$ est stable, pour tout $x \in G$ on a $(u_G)^k(x) = u^k(x)$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Il en découle que pour tout polynôme $P$, l'endomorphisme $P(u_G) : G \to G$ est égal à la restriction à $G$ de l'endomorphisme $P(u) : E \to E$.
$\boxed{1}$ En particulier, pour $x \in G$ on a $(Q(u_G))(x) = (Q(u))(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0$ ce qui montre que $Q(u_G) = 0$. Pour la suite de la question notons $v := u_G$ pour simplifier. Notons $d = \deg(Q)$. L'hypothèse $G \neq 0$ implique $d \geqslant 1$, car si l'on avait $d = 0$ alors $Q$ serait constant donc nul (puisque $Q(u_G) = 0$) ce qui est impossible puisqu'il est facteur de $\pi_u$. Notons $Q = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Comme $Q$ est premier avec $X$, on a $a_0 \neq 0$. Considérons l'égalité : $Q(v) = v^d + a_{d-1}v^{d-1} + \cdots + a_1v + a_0 = 0$ puis en prenant la trace :

$$\operatorname{Tr}(v^d) + a_{d-1}\operatorname{Tr}(v^{d-1}) + \cdots + a_1\operatorname{Tr}(v) + e \cdot a_0 = 0,$$

$\boxed{2}$ où $e = \dim(G) \geqslant 1$ puisque $G \neq 0$. Puisque $K$ est de caractéristique nulle on a $ea_0 \neq 0$ (*en caractéristique $p > 0$ avec par exemple $e = p$ cet argument s'effondrerait !*), donc l'une des traces doit être non nulle i.e. il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\operatorname{Tr}(v^i) \neq 0$. On a bien trouvé $i > 0$ tel que $\operatorname{Tr}(u_G^i) \neq 0$. Enfin, notons $u_F$ l'endomorphisme de $F$ induit par $u$.
$\boxed{1}$ C'est un endomorphisme nilpotent (annulé par $X^k$) de même que toutes ses puissances. Comme $E$ est somme directe de $F$ et $G$, en prenant une base adaptée à cette décomposition on voit que $\operatorname{Tr}(u^j) = \operatorname{Tr}(u_G^j) + \operatorname{Tr}(u_F^j) = \operatorname{Tr}(u_G^j)$ pour tout $j \geqslant 0$. En particulier $\operatorname{Tr}(u^i) = \operatorname{Tr}(u_G^i) \neq 0$.

*Commentaire : il s'agit d'un fait classique que l'on peut trouver par exemple dans Mansuy et Mneimné ou même dans Gourdon. Contrairement à ces deux références, la démonstration proposée ici évite l'introduction des valeurs propres de $u$ dans une clôture algébrique du corps $K$. Elle utilise (sans donner son nom) la* décomposition de Fitting *que l'on peut trouver dans Mansuy et Mneimné, exercice 5.2 du chap. IV, ou dans Francinou-Gianella-Nicolas Algèbre 1, exercice 6.14.*

3.(c) Les questions précédentes impliquent une réciproque au résultat de la question 2. En effet, l'hypothèse que
$\boxed{1}$ $\operatorname{Tr}(u^p) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ jointe au résultat de la question 3.(b) montre que $G = 0$. On en déduit que $E = F$ sur lequel $u$ est nilpotent, annulé par $X^k$.

$\boxed{1}$ 4.(a) Comme $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base, il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que $v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_0) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$. Notant $P := a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$, ceci signifie que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.

4.(b) Nous avons déjà mentionné et utilisé le fait que l'algèbre $K[u]$ est commutative. En particulier $K[u] \subset \mathcal{C}(u)$.
$\boxed{1}$ Pour la même raison $P(u)$ commute avec $u^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Par ailleurs comme $v$ commute avec $u$, il commute lui aussi avec $u^k$ pour tout $k \geqslant 0$. On déduit de (a), par application de $u^k$, que $v(u^k(x_0)) = P(u)(u^k(x_0))$. Ainsi $v$ et
$\boxed{1}$ $P(u)$ coïncident sur tous les éléments de $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ qui est un système générateur de $E$, donc $v = P(u)$. Ceci démontre que $\mathcal{C}(u) \subset K[u]$ donc finalement $K[u] = \mathcal{C}(u)$.

5. Montrons que $u$ est cyclique ssi ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont distinctes deux à deux.

Supposons d'abord les $\lambda_i$ distinctes deux à deux. Alors les espaces propres $E_i$ sont des droites engendrées par des vecteurs propres $x_i$. Nous allons montrer que le vecteur $x_0 := x_1 + \cdots + x_n$ est cyclique. Pour cela soit $P$ un polynôme non nul, de degré minimal, tel que $P(u)(x_0) = 0$ ; notons que $\deg(P) \leqslant n$ puisque $(x_0, u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est liée. Nous avons $P(u)(x_1) + \cdots + P(u)(x_n) = 0$. Comme $E_i$ est $u$-stable donc aussi $P(u)$-stable, on a $P(u)(x_i) \in E_i$ pour tout $i$.
$\boxed{2}$ Les $E_i$ étant en somme directe, on déduit $P(u)(x_i) = 0$, c'est-à-dire $P(\lambda_i)x_i = 0$ puisque $x_i$ est vecteur propre pour $\lambda_i$. Il s'ensuit que $P(\lambda_i) = 0$ donc chaque $X - \lambda_i$ divise $P$. Comme ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux, on déduit que leur produit $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ divise $P$. Alors $n \leqslant \deg(P) \leqslant n$ et on a égalité. Comme $P$ est choisi de degré minimal, la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre donc c'est une base et $x_0$ est cyclique.

Réciproquement supposons qu'une valeur propre est au moins double, disons la première. Dans une base de diagonalisation de $u$, sa matrice est diagonale à éléments diagonaux $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Alors l'espace des matrices diagonales
$\boxed{2}$ par blocs avec $n - 1$ blocs de tailles respectives $(2, 1, 1, \dots, 1)$ est clairement inclus dans le commutant $\mathcal{C}(u)$. Sa dimension est $4 + (n - 2) = n + 2$ donc $n + 2 \leqslant \dim \mathcal{C}(u)$. Comme $\dim K[u] = \deg(\pi_u) \leqslant n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on ne peut avoir $K[u] = \mathcal{C}(u)$. Il découle de la question 4. que $u$ n'est pas cyclique.

6. Soit $d = \dim \operatorname{im}(u)$ et $e = \dim \ker(u)$. D'après le théorème du rang, $d + e = 4$. Par ailleurs les relations $u^2 = 0$ et
$\boxed{1}$ $u \neq 0$ entraînent que $\operatorname{im}(u) \subset \ker(u)$, donc $d \leqslant e$, et que $d \geqslant 1$. Les seules possibilités sont donc $(d, e) = (1, 3)$ et $(d, e) = (2, 2)$.

Dans le premier cas, soit $e_1$ un vecteur tel que $e_2 := u(e_1)$ engendre la droite $\operatorname{im}(u)$ et complétons $(e_2)$ en une base
$\boxed{1}$ $(e_2, e_3, e_4)$ de $\ker(u)$. Comme $e_1 \notin \ker(u)$, l'ensemble $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $E$. Dans cette base, la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le second cas, soient $e_1, e_3$ deux vecteurs tels que $e_2 := u(e_1)$ et $e_4 := u(e_3)$ forment une base du plan $\operatorname{im}(u)$. Aucune combinaison linéaire non triviale $ae_1 + be_3$ ne peut appartenir à $\ker(u)$, car sinon en prenant les images par
$\boxed{1}$ $u$ on aurait une relation de liaison entre $e_2$ et $e_4$. Ceci montre que $(e_1, e_3)$ engendre un plan qui est en somme directe avec $\ker(u)$. Ainsi $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $E$, dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$.

7.(a) Comme $H \subset \ker(u)$, pour tout $x_0 \in H$ non nul on a $u(x_0) = 0$ si bien que le sous-espace engendré par la
$\boxed{1}$ collection des puissances $u^i(x_0)$ est la droite $Kx_0$ et est $u$-stable. Donc les sous-espaces cycliques de $H$ sont les droites

engendrées par des vecteurs $x_0 \neq 0$.

7.(b) Pour chaque $k$ considérons l'application linéaire $\alpha_k : K[X] \to E$, $P \mapsto P(u)(x_k)$. Son noyau est un idéal de $K[X]$, donc engendré par un unique polynôme unitaire $\mu_k$. Soit $r$ l'indice de nilpotence de $u$, alors $u^r = 0$ donc $X^r \in \ker(\alpha_k)$. Alors $\mu_k$ divise $X^r$ et est donc de la forme $\mu_k = X^d$ avec $d = d_k \leqslant r$ entier dépendant de $k$. Pour
$\boxed{2}$ chaque $k$, on peut considérer aussi l'application linéaire $\beta_k : K[X] \to E$, $P \mapsto P(u)(y_k)$. Il est clair que son noyau est l'idéal engendré par $X^{d_k-1}$. Au passage, on note que l'image de $\beta_k$ est l'espace cyclique $F_k$ qui est de dimension $\geqslant 1$, ce qui montre que $d_k \geqslant 2$. (Le cas $r = 1$ correspondant à $u = 0$ est trivial et est écarté.) Ce qui précède montre que $K[u](x_k) = \mathrm{Vect}(x_k, u(x_k), \dots, u^{d_k-1}(x_k))$ et $K[u](y_k) = \mathrm{Vect}(y_k, u(y_k), \dots, u^{d_k-2}(y_k)) = \mathrm{Vect}(u(x_k), \dots, u^{d_k-1}(x_k))$.

Montrons que les espaces $E_k := K[u](x_k)$ et $H$ sont en somme directe. Partons d'une relation $h + \sum_{k=0}^{p} r_k = 0$ avec $h \in H$ et $r_k \in E_k$ écrit sous la forme $r_k = a_{k,0}x_k + a_{k,1}u(x_k) + \dots + a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k)$. En appliquant $u$ et en utilisant le fait que les $F_k$ sont en somme directe, on trouve que $a_{k,0} = a_{k,1} = \dots = a_{k,d_k-2}$ pour chaque $k$. La relation initiale
$\boxed{2}$ s'écrit donc $h + \sum_{k=0}^{p} a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k) = 0$. Le fait que $d_k \geqslant 2$ entraîne que le terme $a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k)$ appartient à $F_k \cap \ker(u)$ qui est inclus dans $G$. La définition de $H$ implique que $h = \sum_{k=0}^{p} a_{k,d_k-1}u^{d_k-1}(x_k) = 0$. Enfin on voit que $a_{k,d_k-1} = 0$ une fois encore parce que les $F_k$ sont en somme directe. Ainsi les $E_k$ et $H$ sont en somme directe.

Il reste à montrer que la somme est égale à $E$. Soit $x \in E$ et $(P_k)_{k=1}^{p}$ des polynômes tels que $u(x) = \sum_{k=1}^{p} P_k(u)(y_k)$.
$\boxed{2}$ On voit alors que $x - \sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k) \in \ker(u)$. Par définition de $G$ et $H$ on peut écrire $x - \sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k) = g + h$ avec $g \in G$ et $h \in H$. Comme $G \subset \mathrm{im}(u)$ on peut choisir des polynômes $(Q_k)_{k=1}^{p}$ tels que $g = \sum_{k=1}^{p} Q_k(u)(y_k) = \sum_{k=1}^{p} uQ_k(u)(x_k)$. Posant $R_k = P_k + XQ_k$, on trouve $x = \sum_{k=1}^{p} R_k(u)(x_k) + h$ comme voulu.

*Commentaire : pour $x \in E$, le polynôme générateur unitaire du noyau de $\alpha : K[X] \to E$, $P \mapsto P(u)(x)$ est parfois appelé* polynôme minimal ponctuel de $x$. *Son utilisation est classique dans l'étude des endomorphismes cycliques. On prendra garde au fait que $\alpha$ n'est pas un morphisme d'algèbres ($E$ n'est même pas une algèbre !) si bien que le fait que* $\ker(\alpha)$ *soit un idéal est un fait moins trivial que dans le cas du morphisme $K[X] \to \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ associé à un endomorphisme.*

7.(c) D'après 7.(a), n'importe quelle base de $H$ en fournit une décomposition en droites qui est une décomposition en
$\boxed{1}$ somme directe d'espaces cycliques. La décomposition de 7.(b) fournit donc une décomposition en espaces cycliques qui achève la récurrence. Le théorème énoncé au début de 7 est donc prouvé.

## II. Bicommutant

1. Par hypothèse, il existe un automorphisme $f$ tel que $v = fuf^{-1}$. Montrons que $\mathcal{C}(v) = f\mathcal{C}(u)f^{-1}$ :

$$x \in \mathcal{C}(v) \iff xfuf^{-1} = fuf^{-1}x \iff f^{-1}xfu = uf^{-1}xf \iff f^{-1}xf \in \mathcal{C}(u) \iff x \in f\mathcal{C}(u)f^{-1}.$$

$\boxed{2}$ Montrons maintenant que $\mathcal{CC}(v) = f\mathcal{CC}(u)f^{-1}$. En effet, $y \in \mathcal{CC}(v)$ ssi $yz = zy$ pour tout $z \in \mathcal{C}(v) = f\mathcal{C}(u)f^{-1}$, ssi $yfaf^{-1} = faf^{-1}y$ pour tout $a \in \mathcal{C}(u)$, ssi $f^{-1}yf \in \mathcal{CC}(u)$, ssi $y \in f\mathcal{CC}(u)f^{-1}$.

Le résultat demandé en découle en prenant les dimensions.

2. On sait que si un endomorphisme commute avec $u$, il commute avec tous les polynômes en $u$, en d'autres termes $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{C}(K[u])$. Or il découle de la définition générale que $U_1 \subset U_2$ entraîne $\mathcal{C}(U_2) \subset \mathcal{C}(U_1)$. On déduit que $\mathcal{CC}(K[u]) \subset$
$\boxed{1}$ $\mathcal{CC}(u)$. Une autre propriété générale est que $U \subset \mathcal{CC}(U)$. En effet, si $u \in U$, alors par définition de $\mathcal{C}(U)$, tout $x \in \mathcal{C}(U)$ commute avec $u$. Appliquant cette propriété pour $U = K[u]$ donne $K[u] \subset \mathcal{CC}(K[u])$.

Finalement $K[u] \subset \mathcal{CC}(K[u]) \subset \mathcal{CC}(u)$. On aura donc l'égalité $K[u] = \mathcal{CC}(u)$ si et seulement si on a égalité des
$\boxed{1}$ dimensions. Comme $\dim K[u] = \deg(\pi_u)$ d'après I.1, le résultat demandé s'ensuit.

3. Le rang de $M$ comme élément de $M_n(K)$ est la taille $r$ maximale d'une matrice extraite $m \in M_r(K)$ de $M$ dont le déterminant est non nul. Clairement, les matrices extraites de $M$ vue comme élément de $M_n(L)$ sont les mêmes que
$\boxed{2}$ les matrices extraites de $M$ vue comme élément de $M_n(K)$. Comme la non-annulation de $\det(m)$ ne dépend pas du surcorps $L \supset K$, on voit que $r$ est aussi le rang de $M$ comme élément de $M_n(L)$.

$\boxed{1}$ 4. Notons $\pi_{M,K}$ resp. $\pi_{M,L}$ le polynôme minimal de $M$ vue comme élément de $M_n(K)$ resp. de $M_n(L)$. Comme $\pi_{M,K}$ annule $M$ dans $M_n(K)$ il l'annule aussi dans $M_n(L)$, donc $\pi_{M,K}$ est divisible par $\pi_{M,L}$.

Par ailleurs nous avons montré que $\deg(\pi_{M,K})$ est égal à la dimension de l'algèbre $K[M] \subset M_n(K)$. Cette algèbre est par définition le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{id}, M, M^2, \dots, M^{n-1}$. Ainsi $\deg(\pi_{M,K}) = \mathrm{rang}(\mathrm{id}, M, M^2, \dots, M^{n-1})$.
$\boxed{2}$ D'après la question précédente le rang d'une matrice ne dépend pas du surcorps $L \supset K$, d'où $\deg(\pi_{M,K}) = \deg(\pi_{M,L})$. Deux polynômes de degrés égaux et qui se divisent sont égaux, d'où le résultat.

$\boxed{1}$ 5. D'après les questions 2 et 4 on a $\dim_K(\mathcal{CC}_K(M)) = \deg(\pi_{M,K}) = \deg(\pi_{M,L}) = \dim_L(\mathcal{CC}_L(M))$.

6.(a) D'après les règles de calcul par blocs, si $A' \in \mathcal{C}(A)$ et $B' \in \mathcal{C}(B)$ alors $\left(\begin{smallmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{smallmatrix}\right)$ est dans le commutant de $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.
$\boxed{1}$ Comme $A' = I$ et $B' = 0$ commutent avec toutes les matrices, le résultat s'en déduit.

6.(b) Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} R & S \\ T & U \end{smallmatrix}\right)$ une matrice avec la même décomposition par blocs que $Y := \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors $XY = \left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ T & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tandis
$\boxed{1}$ que $YX = \left(\begin{smallmatrix} R & S \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On voit que $X \in \mathcal{C}(Y)$ si et seulement si $S = T = 0$. En d'autres termes le commutant de $Y$ est

composé des matrices diagonales par blocs $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & U \end{smallmatrix}\right)$.

6.(c) Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme $X = \left(\begin{smallmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{smallmatrix}\right)$ avec $P, Q \in K[X]$. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} R & S \\ T & U \end{smallmatrix}\right)$ une matrice du bicommutant de $M$. Alors $X$ commute avec $Y = \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ d'après 6.(a), donc $S = T = 0$ d'après 6.(b). Parmi les matrices
$\boxed{2}$ qui commutent avec $M$ on trouve toutes les matrices $\left(\begin{smallmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{smallmatrix}\right)$ avec $A' \in \mathcal{C}(A)$ et $B' \in \mathcal{C}(B)$. La relation $X \in \mathcal{CC}(M)$ implique donc que $R \in \mathcal{CC}(A)$ et $U \in \mathcal{CC}(B)$. Comme on suppose que le théorème du bicommutant est valable pour $A$ et $B$, il s'ensuit qu'il existe des polynômes $P, Q \in K[X]$ tels que $R = P(A)$ et $U = Q(B)$. Donc $X \in \mathcal{E}$. Montrons que réciproquement, toute matrice $X = \left(\begin{smallmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{CC}(M)$. Ceci découlera du fait que $\pi_A$ et $\pi_B$
$\boxed{2}$ sont premiers entre eux. En effet, cette hypothèse implique d'après Bézout que $P - Q$ peut s'écrire sous la forme $P - Q = \alpha\pi_A + \beta\pi_B$ pour certains polynômes $\alpha, \beta \in K[X]$. Posons alors $F := P - \alpha\pi_A = Q + \beta\pi_B$. De $F = P - \alpha\pi_A$ on déduit que $F(A) = P(A)$, et de $F = Q + \beta\pi_B$ on déduit que $F(B) = Q(B)$. Ceci montre que $X = F(M)$. Comme on a déjà vu que $K[M] \subset \mathcal{CC}(M)$, finalement $\mathcal{CC}(M) = \mathcal{E}$.

$\boxed{1}$ 6.(d) Nous avons montré en chemin de la preuve de 6.(c) que $\mathcal{E} \subset K[M]$, donc $\mathcal{CC}(M) = \mathcal{E} \subset K[M]$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a $\mathcal{CC}(M) = K[M]$.

*Commentaire : on aurait pu donner un argument différent dans la deuxième partie de la preuve de 6.(c), de la manière suivante : on a montré que $\mathcal{CC}(M) \subset \mathcal{E}$, or $\mathcal{E} \simeq K[A] \times K[B]$ comme espace vectoriel. Celui-ci est de dimension* $\deg(\pi_A)\deg(\pi_B)$. *Comme $\pi_M = \pi_A\pi_B$ (par primalité de $\pi_A$ et $\pi_B$) ce degré vaut* $\deg(\pi_M)$. *Ainsi* $\dim \mathcal{CC}(M) \leqslant \deg(\pi_M)$ *d'où égalité et le résultat par II.2. Cet argument, lui aussi, établit plus ou moins 6.(c) et 6.(d) en même temps.*

7.(a) Soit $x \in \mathcal{C}(u)$. Alors $xu = ux$ donc $xn = x(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = xu - \lambda x = ux - \lambda x = (u - \lambda\,\mathrm{id}_E)x = nx$ et $x \in \mathcal{C}(n)$. Réciproquement, puisque $n = u - \lambda\,\mathrm{id}_E$, l'inclusion précédente avec $\lambda$ remplacé par $-\lambda$ montre que $\mathcal{C}(n) \subset \mathcal{C}(u)$. On
$\boxed{1}$ a donc égalité.

Dire que $y \in \mathcal{CC}(u)$ signifie que $yx = xy$ pour tout $x \in \mathcal{C}(u)$. C'est équivalent à dire que $yx = xy$ donc pour tout $x \in \mathcal{C}(n)$ vu ce qui précède, i.e. $y \in \mathcal{CC}(n)$.

7.(b) En raisonnant par blocs on se ramène au cas d'un seul bloc, on supprime donc les indices $i$. On a $x \in E$ et
$\boxed{1}$ $\mathcal{B} = (x, n(x), \dots, n^{d-1}(x))$. Alors l'image par $n$ d'un vecteur de $\mathcal{B}$ est égale au suivant, sauf l'image de $n^{d-1}(x)$ qui est nulle, d'où le fait que la matrice de $n$ dans $\mathcal{B}$ est la matrice compagnon.

7.(c) Soit $g \in \mathcal{CC}(n)$, nous voulons montrer que $g \in K[n]$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$ notons $p_i : E \to E$ le projecteur sur $E_i$ parallèlement à la décomposition $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$. Comme les $E_j$ sont $n$-stables, on a

$\boxed{2}$ - si $x \in E_i$ : $p_i(n(x)) = nx = n(p_i(x))$,

- si $x \in E_j$, $j \neq i$ : $p_i(n(x)) = 0 = n(p_i(x))$.

En résumé $p_i n = n p_i$. Il en découle que $g \in \mathcal{C}(p_i)$. Ceci montre que $g$ laisse stables les $E_i$.

Soit $q_i : E \to E$ l'unique application linéaire qui est nulle sur $E_j$ lorsque $j \neq p$, et définie sur les éléments de la base $\mathcal{B}_p$ de $E_p$ par $q_i(n^s(x_p)) = n^s(x_i)$ pour $s = 0, \dots, d_p - 1$. Par combinaison linéaire, on voit alors que $q_i(P(n)(x_p)) = P(n)(x_i)$ pour tout $P \in K[X]$. Utilisant encore le fait que $E_i$ est $n$-stable, on voit que $q_i n = n q_i$ :
$\boxed{2}$ sur $E_j$, $j \neq p$, cela se démontre comme ci-dessus pour $p_i$, et pour tout $y = P(n)(x_p) \in E_p$ on calcule $q_i(n(y)) = q_i(nP(n)(x_p))) = (nP(n))(x_i) = n(q_i(y))$ d'où notre assertion. Comme précédemment on déduit que $g \in \mathcal{C}(q_i)$.

Comme $g$ laisse stable $E_p$, il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que $g(x_p) = P(n)(x_p)$. Utilisant l'égalité $gq_i = q_i g$ appliquée en $x_p$, on trouve $g(x_i) = g(q_i(x_p)) = q_i(g(x_p)) = q_i(P(n)(x_p)) = P(n)(x_i)$. Puisque les endomorphismes $g$ et
$\boxed{2}$ $P(n)$ commutent avec toutes les puissances de $n$ et sont linéaires, ceci implique qu'ils coïncident sur tous les éléments $Q(n)(x_i)$ de $E_i$. Ainsi $g$ et $P(n)$ coïncident sur tous les $E_i$ donc partout. La conclusion est que $g = P(n)$ et nous avons terminé.

8. Soit $M \in M_n(K)$. Soit $L$ une extension de scindement du polynôme minimal $\pi_{M,K}$ de $M$. D'après II.4, on a $\pi_{M,K} = \pi_{M,L}$ donc leurs degrés sont égaux. D'après II.5 on a $\dim_K(\mathcal{CC}_K(M)) = \dim_L(\mathcal{CC}_L(M))$. Il s'ensuit que les
$\boxed{1}$ deux membres de l'égalité (hypothétique) $\dim_K(\mathcal{CC}_K(M)) = \deg(\pi_{M,K})$, dont la validité équivaut d'après II.2 au théorème du bicommutant, ne changent pas lorsqu'on change $K$ en $L$. Ceci démontre qu'il nous suffit d'établir le théorème du bicommutant pour $M$ vue dans $M_n(L)$, i.e. (quitte à changer $L$ en $K$ dans la notation) on peut supposer $\pi_M$ scindé. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes, $d_i$ leurs multiplicités, et $E_i = \ker((M - \lambda_i\,\mathrm{id}_{K^n})^{d_i})$ les sous-espaces caractéristiques. On a $E = \oplus_{i=1}^{r} E_i$ et dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice $M$ est
$\boxed{2}$ diagonale par blocs de blocs notés $M_i$. Notons $P_i = (X - \lambda_i)^{d_i}$ qui est le polynôme minimal de $M_i$. Comme les $P_i$ sont premiers entre eux deux à deux, d'après la question 6 et une récurrence immédiate, il suffit de démontrer le théorème du bicommutant pour chaque $M_i$. Or le théorème est vrai pour $M_i - \lambda_i\,\mathrm{id}_{K^{d_i}}$ d'après 7.(c) et il est donc vrai pour $M_i$ d'après 7.(a). Ceci termine la preuve dans le cas général.

### III. Décomposition de Dunford pour une matrice

1. Si $M$ est semi-simple, il existe une extension convenable $L$ de $K$ qui contient les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans laquelle $M$ est semblable à la matrice diagonale $D$ d'éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r$

où chaque $\lambda_i$ est répété un nombre de fois égal à sa multiplicité. Le polynôme minimal de $M = PDP^{-1}$ est égal au
$\boxed{2}$ polynôme minimal de $D$ car $M$ et $D$ ont même idéaux de polynômes annulateurs, d'où $\pi_M = \pi_D = (X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_r)$ qui est à facteurs simples dans $L$. Or nous avons vu en II.4 que le polynôme minimal est le même sur $K$ ou sur $L$. Il en découle que $\pi_M$ est à facteurs simples dans $K$, car un hypothétique facteur multiple dans $K[X]$ fournirait un facteur multiple dans $L[X]$.

Réciproquement supposons que $\pi_M$ est à facteurs simples sur $K$. Pour chaque tel facteur irréductible $P$ de $\pi_M$, on a donc $\operatorname{pgcd}(P, P') = 1$ où $P'$ est le polynôme dérivé, non nul car nous sommes en caractéristique nulle. On sait que
$\boxed{2}$ le pgcd ne change pas par extension du corps de base : c'est l'algorithme d'Euclide de calcul du pgcd qui le montre. Il s'ensuit que $\operatorname{pgcd}(P, P') = 1$ même lorsqu'on voit $P, P'$ comme des polynômes à coefficients dans une extension $L/K$. Sur une extension qui scinde $\pi_M$, on obtient que $\pi_M$ est scindé à racines simples. Par le critère bien connu, ceci implique que $M$ est diagonalisable sur $L$, donc semi-simple.

2. Les polynômes $P$ et $\chi_A$ ont mêmes facteurs irréductibles. Justifions-le. Il est clair que $P$ et $\pi_A$ ont mêmes facteurs irréductibles, il reste à montrer que $\pi_A$ et $\chi_A$ ont mêmes facteurs irréductibles.

Il est clair que chaque facteur irréductible de $\pi_A$ divise $\chi_A$, puisque $\pi_A$ divise $\chi_A$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

$\boxed{1}$ Réciproquement montrons que chaque facteur irréductible $Q$ de $\chi_A$ divise $\pi_A$. Sinon, on a une relation de Bézout $UQ + V\pi_A = 1$. On déduit $U(A)Q(A) = \mathrm{id}$ donc $Q(A)$ est inversible. Or toute racine $\lambda$ de $Q$ dans une extension de $K$ est valeur propre de $A$, ce qui montre que l'endomorphisme associé à $Q(A)$ n'est pas injectif et son déterminant est nul, contradiction.

Remarque : si on souhaite, on peut formuler ce qui précède de manière (apparemment) plus quantitative en écrivant $P \mid \pi_A \mid \chi_A \mid P^n$ et (puisque nous sommes en caractéristique nulle) $P = \pi_A/\operatorname{pgcd}(\pi_A, \pi_A') = \chi_A/\operatorname{pgcd}(\chi_A, \chi_A')$. (*Je ne sais pas exactement ce qu'attendait le correcteur, et s'il attendait des preuves.*)

3. Supposons que $P$ et $P'$ possèdent un facteur irréductible commun, qui est donc l'un des $P_i$, disons $P_1$ quitte à renuméroter. Alors $P_1$ divise $P' = \sum_{i=1}^k P_i' \prod_{j\neq i} P_j$. Ceci signifie que $P_1$ divise $P_1' \prod_{j\neq 1} P_j$. Comme $P_1$ est premier avec tous les $P_j$, $j \neq 1$, le lemme d'Euclide implique que $P_1$ divise $P_1'$. Or $P_1$ est non constant en caractéristique nulle,
$\boxed{2}$ donc $-\infty < \deg(P_1') < \deg(P_1)$. La divisibilité $P_1 \mid P_1'$ est donc impossible.

Par contraposée, $P$ et $P'$ sont premiers entre eux et d'après le théorème de Bézout, il existe $R, S \in K[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.

4. La relation à établir est $K$-linéaire et il suffit donc de l'établir sur les monômes $P = X^k$. Or d'après le binôme
$\boxed{1}$ de Newton on a $(X+Y)^k = X^k + kYX^{k-1} + Y^2 \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} Y^{i-2} X^{k-i}$ ce qui est la relation indiquée avec $Q = \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} Y^{i-2} X^{k-i}$.

5. Démontrons par récurrence que $P(A_k) \in P(A)^{2^k} K[A]$ pour tout $k \geqslant 0$. Pour $k = 0$ c'est vrai puisque $P(A_0) = P(A)$. Supposons l'énoncé vrai pour un entier $k$. Comme toutes les matrices en jeu appartiennent à l'algèbre $K[A]$ qui est
$\boxed{1}$ commutative, il est légitime d'appliquer l'identité de la question 4 avec $X = A_k$ et $Y = -P(A_k)S(A_k)$. On trouve :

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P(A_k - P(A_k)S(A_k)) \\ &= P(A_k) - P(A_k)S(A_k)P'(A_k) + (-P(A_k)S(A_k))^2 Q(A_k, -P(A_k)S(A_k)) \\ &= P(A_k)(\mathrm{I} - S(A_k)P'(A_k)) + (-P(A_k)S(A_k))^2 Q(A_k, -P(A_k)S(A_k)). \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Or $\mathrm{I} - S(A_k)P'(A_k) = R(A_k)P(A_k)$ d'après la question 3. En injectant ceci dans notre calcul, on voit que $P(A_{k+1})$ est un multiple de $P(A_k)^2$. Par récurrence $P(A_k) \in P(A)^{2^k} K[A]$, donc $P(A_{k+1}) \in P(A_k)^2 K[A] \subset P(A)^{2^{k+1}} K[A]$. Notons maintenant $m := \max(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, de sorte que $P^m$ est divisible par $\pi_A$. Pour tout entier $\ell$ tel que $2^\ell \geqslant m$, la matrice
$\boxed{1}$ $P(A)^{2^\ell}$ est multiple de $P(A)^m$ elle-même multiple de $\pi_A(A) = 0$. Donc $P(A_\ell) = 0$. On peut prendre $\ell = \lceil \log_2(m) \rceil$.

6. La matrice $A_\ell$ est annulée par le polynôme $P$ qui est à facteurs irréductibles simples. Son polynôme minimal est
$\boxed{1}$ donc lui aussi à facteurs simples, et d'après la question 1 on voit que $A_\ell$ est semi-simple. Par ailleurs, on constate par récurrence que $A - A_k$ est nilpotente : elle est nulle pour $k = 0$, et $A - A_{k+1} = (A - A_k) + (A_k - A_{k+1})$ où le premier
$\boxed{1}$ terme est nilpotent par hypothèse de récurrence et le second terme est nilpotent car multiple de $P(A_k)$. (La somme de deux nilpotents qui commutent est nilpotente !) En particulier, $A - A_\ell$ est nilpotente. Pour conclure, on observe
$\boxed{1}$ que toutes les matrices en jeu dans ces arguments appartiennent à $K[A]$ et donc commutent entre elles. L'écriture $A = D + N$ avec $D = A_\ell$ et $N = A - A_\ell$ vérifie toutes les propriétés de la décomposition unique en somme de matrices commutantes semi-simple et nilpotente ; elle lui est égale.

### IV. Théorie des répliques de Chevalley

1.(a) Notons $E_{i,j}$ la matrice dont le seul terme non nul est un 1 situé en position $(i,j)$. En d'autres termes, le terme d'incide $(r,s)$ est $\delta_{i,r}\delta_{j,s}$, où $\delta$ est le symbole de Kronecker. D'après les définitions, la matrice $E_{i,j} \otimes E_{k,l}$ est la matrice
$\boxed{1}$ par blocs $(\delta_{i,r}\delta_{j,s}E_{k,l})_{r,s}$, ce qui veut dire que tous ses coefficients sont nuls sauf celui situé en position $(k,l)$ dans le bloc numéro $(i,j)$, qui vaut 1. Il est alors clair que ces matrices engendrent $\mathcal{M}_{np,mq}(K)$ car pour une matrice $A$ écrite

par blocs $A = (A_{i,j})$ avec $A_{i,j} = (a_{i,j,k,l}) \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, compte tenu de ce qui précède on a $A = \sum_{i,j,k,l} a_{i,j,k,l} E_{i,j} \otimes E_{k,l}$. Donc $\mathcal{M}_{n,m}(K) \otimes \mathcal{M}_{p,q}(K) = \mathcal{M}_{np,mq}(K)$.

1.(b) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Comme $(e_{i,j})$ et $(f_{k,l})$ sont des bases respectivement, on peut trouver des écritures $A = \sum_{i,j} a_{i,j} e_{i,j}$ et $B = \sum_{k,l} b_{k,l} f_{k,l}$. Comme l'opérateur $\otimes$ est bilinéaire (admis par l'énoncé), on obtient :

$$A \otimes B = \sum_{i,j,k,l} a_{i,j} b_{k,l} e_{i,j} \otimes f_{k,l}.$$

$\boxed{2}$ On voit que la famille $(e_{i,j} \otimes f_{k,l})_{i,j,k,l}$ engendre l'espace vectoriel engendré par les matrices $A \otimes B$, qui est d'après 1.(a) égal à $\mathcal{M}_{np,mq}(K)$. On obtient une famille génératrice à $npmq$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $npmq$, c'est donc une base.

1.(c) À strictement parler, l'opérateur $\otimes$ n'a été défini que pour des espaces de matrices. Or $E^*$ et $F^*$ ne sont pas des espaces de matrices, mais des espaces de *formes linéaires sur de tels espaces.* (À mon sens, il s'agit là d'une faiblesse importante du sujet.) Pour voir $E^*$ et $F^*$ comme des espaces de matrices nous allons utiliser l'isomorphisme $\mathcal{M}_{m,n}(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n,m}(K)^*$, $A \mapsto f_A$ établi dans la deuxième question préliminaire P2 pour *identifier* $E^*$ avec $\mathcal{M}_{m,n}(K)$
$\boxed{1}$ et $F^*$ avec $\mathcal{M}_{q,p}(K)$. On dispose alors d'isomorphismes :

$$E^* \otimes F^* \xrightarrow{\text{P2}} \mathcal{M}_{m,n}(K) \otimes \mathcal{M}_{q,p}(K) \xrightarrow{1.(a)} \mathcal{M}_{mq,np}(K) \xrightarrow{\text{P2}} \mathcal{M}_{np,mq}(K)^* = (E \otimes F)^*.$$

C'est l'isomorphisme recherché.

2.(a) Les coefficients diagonaux de $A \otimes B$ sont les coefficients situés sur la diagonale d'un bloc diagonal $a_{i,j}B$. Ce sont
$\boxed{1}$ donc les coefficients $a_{i,i} b_{k,k}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant m$. On obtient :

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i,k} a_{i,i} b_{k,k} = \big(\sum_i a_{i,i}\big)\big(\sum_k b_{k,k}\big) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B).$$

2.(b) Notons $\overline{K}$ une clôture algébrique de $K$. Nous pouvons plonger tous les espaces de matrices dans les espaces
$\boxed{1}$ analogues sur $\overline{K}$, i.e. $M_n(\overline{K})$ etc. Alors les polynômes caractéristiques de $A$ et $B$ sont scindés, si bien que ces matrices sont trigonalisables. Notons $T \in M_n(\overline{K})$ et $U \in M_m(\overline{K})$ les formes triangulaires supérieures et $P, Q$ des matrices de passage : $PAP^{-1} = T$ et $QBQ^{-1} = U$. Posons $R = \mathbf{I}_n \otimes Q$, par calcul par blocs on voit que

$$R(A \otimes B)R^{-1} = (a_{i,j} QBQ^{-1}) = (a_{i,j} U).$$

$\boxed{2}$ Posons $S = P \otimes \mathbf{I}_m$. Par calcul par blocs encore, on voit que :

$$SR(A \otimes B)R^{-1}S^{-1} = (t_{i,j} U) = T \otimes U.$$

[ Détail : notons $P = (p_{i,j})$, $P^{-1} = (\widetilde{p}_{i,j})$. On multiplie d'abord à gauche par $S$ : le bloc d'indice $(i,j)$ de $SR(A \otimes B)R^{-1}$ est égal à $\sum_k p_{i,k} a_{k,j} U$. On multiplie ensuite à droite par $P^{-1}$ : le bloc d'indice $(i,j)$ de $SR(A \otimes B)R^{-1}S^{-1}$ est égal à $\sum_l \sum_k p_{i,k} a_{k,l} U \widetilde{p}_{l,j} \mathbf{I}_m = \sum_{l,k} p_{i,k} a_{k,l} \widetilde{p}_{l,j} U = t_{i,j} U$. ] Cette matrice est triangulaire supérieure, avec pour coefficients
$\boxed{2}$ diagonaux les $t_{i,i} u_{k,k}$. Comme le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des déterminants des blocs, on obtient :

$$\begin{aligned}\det(A \otimes B) &= \det(SR(A \otimes B)R^{-1}S^{-1}) = \det(t_{i,j} U) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \det(t_{i,i} U) = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^m \det(U) = \det(T)^m \det(U)^n = \det(A)^m \det(B)^n.\end{aligned}$$

*Commentaire : dans la suite, il faut bien comprendre quel est le sens d'une expression comme $X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$. On doit voir chaque $X_i$ comme un élément de $K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et chaque $Y_j$ comme un élément de $(K^n)^* = \mathcal{M}_{1,n}(K)$, comme indiqué dans les notations situées en prologue du problème. La définition de $A \otimes B$ donnée précédemment s'applique alors. On a admis que $\otimes$ était associatif, de sorte que la notation $X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$ sans parenthèses n'est pas ambigüe.*

$\boxed{1}$ 3. D'après la question 1.(a) on a :

$$\mathcal{N}_{1,1} = K^n \otimes (K^n)^* = \mathcal{M}_{n,1}(K) \otimes \mathcal{M}_{1,n}(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K) = \mathcal{M}_n(K).$$

De plus, on a vu en 1.(b) qu'une base de cet espace est donnée par les $E_i \otimes F_j$, avec $E_i = {}^t(0 \cdots 1 \cdots 0)$ (le 1 est en position $i$) et $F_j = (0 \cdots 1 \cdots 0)$ (le 1 est en position $j$), qui dans $\mathcal{M}_n(K)$ correspond à la matrice $E_{i,j}$. Soit maintenant

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour montrer que $A_{1,1} \cdot M = \mathrm{ad}_A(M)$, il suffit de le montrer pour les matrices de base
2 $M = E_i \otimes F_j$. Dans ce cas on a :

$$A_{1,1} \cdot M = A_{1,1} \cdot (E_i \otimes F_j) = AE_i \otimes F_j - E_i \otimes F_j A.$$

Notons $L_i$, resp. $C_j$, la $i$-ème colonne, resp. la $j$-ème colonne, de $A$. Alors $AE_i = C_i$ donc $AE_i \otimes F_j = C_i \otimes F_j$ est la matrice $(n,n)$ dont la seule colonne non nulle est la $j$-ème, égale à $C_i$. Ceci est exactement la matrice $AE_{i,j}$. De même $F_j A = L_j$ et $E_i \otimes F_j A = E_i \otimes L_j$ est la matrice $(n,n)$ dont la seule ligne non nulle est la $i$-ème, égale à $L_j$. C'est la matrice $E_{i,j}A$. Il s'ensuit que

$$A_{1,1} \cdot (E_i \otimes F_j) = AE_{i,j} - E_{i,j}A = \mathrm{ad}_A(M).$$

4. Compte tenu des égalités $K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $(K^n)^* = \mathcal{M}_{1,n}(K)$ ainsi que de l'isomorphisme canonique $\mathcal{M}_{m,n}(K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{n,m}(K)^*$ fourni par la trace dans la question P2, tous les espaces qui apparaissent ci-dessous sont des espaces de
1 matrices. On peut donc utiliser les résultats de 1.(a) et 1.(c), étendus par une récurrence immédiate à un nombre fini arbitraire d'espaces vectoriels. On trouve en particulier

$$(K^n)^{\otimes r} = (\mathcal{M}_{n,1}(K))^{\otimes r} = \mathcal{M}_{n^r,1}(K) = K^{n^r} \quad \text{et} \quad ((K^n)^*)^{\otimes s} = (\mathcal{M}_{1,n}(K))^{\otimes s} = \mathcal{M}_{1,n^s}(K) = (K^{n^s})^*.$$

1 On en déduit les isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{N}_{r,s}^* = ((K^n)^{\otimes r} \otimes ((K^n)^*)^{\otimes s})^* = ((K^n)^{\otimes r})^* \otimes (((K^n)^*)^{\otimes s})^* = (K^{n^r})^* \otimes K^{n^s} = \mathcal{N}_{s,r},$$

1 où pour finir on a utilisé la bidualité en dimension finie $(K^{n^s})^{**} = K^{n^s}$.

1 5. Il est clair que $\phi_{P,r,s} \circ \phi_{P^{-1},r,s} = \phi_{P^{-1},r,s} \circ \phi_{P,r,s} = \mathrm{id}$ donc $\phi_{P,r,s}$ est un isomorphisme d'inverse $\phi_{P^{-1},r,s}$.

6. Pour alléger, nous noterons $\phi_P$ au lieu de $\phi_{P,r,s}$ l'automorphisme de la question précédente. Si $A$ et $B$ sont semblables, il existe une matrice inversible $P$ telle que $B = PAP^{-1}$. Pour un tenseur $n = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$ dans
1 $\mathcal{N}_{r,s}$, calculons l'effet de $\phi_P A_{r,s} \phi_{P^{-1}}$ en regardant successivement l'action des trois endomorphismes $\phi_{P^{-1}}$ puis $A_{r,s}$ puis $\phi_P$ :

$$\begin{aligned}
n &\mapsto P^{-1}X_1 \otimes \ldots \otimes P^{-1}X_r \otimes Y_1 P \otimes \ldots \otimes Y_s P \\
&\mapsto \sum_{i=1}^{r} P^{-1}X_1 \otimes \ldots \otimes AP^{-1}X_i \otimes \ldots \otimes P^{-1}X_r \otimes Y_1 P \otimes \ldots \otimes Y_s P \\
&\qquad\qquad - \sum_{j=1}^{s} P^{-1}X_1 \otimes \ldots \otimes P^{-1}X_r \otimes Y_1 P \otimes \ldots \otimes Y_j PA \otimes \ldots \otimes Y_s P \\
&\mapsto \sum_{i=1}^{r} X_1 \otimes \ldots \otimes PAP^{-1}X_i \otimes \ldots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_s - \sum_{j=1}^{s} X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_j PAP^{-1} \otimes \ldots \otimes Y_s.
\end{aligned}$$

1 On constate que $\phi_P A_{r,s} \phi_{P^{-1}} = (PAP^{-1})_{r,s} = B_{r,s}$. Ceci montre que $A_{r,s}$ et $B_{r,s}$ sont des endomorphismes semblables dans $\mathcal{L}(\mathcal{N}_{r,s})$.

7.(a) Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ une base ordonnée de vecteurs propres pour $A$, telle que $Ax_i = \lambda_i x_i$. Ici $x_i$ est un vecteur colonne. La matrice transposée ${}^tA$ est elle aussi diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que $A$. Notons $(z_1, \ldots, z_n)$
1 une base ordonnée de vecteurs propres pour ${}^tA$, avec ${}^tAz_i = \lambda_i z_i$, et posons $y_i = {}^tz_i$ qui est un vecteur ligne. En transposant on trouve donc $y_i A = \lambda y_i$. D'après la question 1.(b), dont le résultat est étendu par une récurrence
1 immédiate à un nombre fini arbitraire d'espaces vectoriels, la famille formée par les vecteurs

$$n_{\underline{i},\underline{j}} := x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_r} \otimes y_{j_1} \otimes \cdots \otimes y_{j_s}$$

avec $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$ et $1 \leqslant j_1, \ldots, j_s \leqslant n$, est une base de $\mathcal{N}_{r,s}$. De plus, on a

$$x_1 \otimes \ldots \otimes Ax_i \otimes \ldots \otimes x_r = \lambda_i \, x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \qquad \text{et} \qquad y_1 \otimes \ldots \otimes y_j A \otimes \ldots \otimes y_s = \lambda_j y_1 \otimes \ldots \otimes y_s$$

dont on déduit immédiatement, par somme, que le vecteur $n_{\underline{i},\underline{j}}$ introduit ci-dessus est un vecteur propre pour $A_{r,s}$
1 relatif à la valeur propre $\left(\sum_{p=1}^r \lambda_{i_p}\right) - \left(\sum_{q=1}^s \lambda_{j_q}\right)$. Ainsi $A_{r,s}$ est diagonalisable avec les valeurs propres indiquées.

7.(b) Soit $N \geqslant 1$ tel que $A^N = 0$. Pour montrer que $A_{r,s}$ est nilpotente, il suffit de trouver $M$ tel que $(A_{r,s})^M$ annule tous les vecteurs de la forme $n = X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$ puisque ceux-ci engendrent $\mathcal{N}_{r,s}$. On observe que $A_{r,s} \cdot n$ est somme de vecteurs de la forme $X_1 \otimes \ldots \otimes AX_i \otimes \ldots \otimes X_r$ ou $Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_j A \otimes \ldots \otimes Y_s$, où la matrice $A$ apparaît
2 une fois. Par récurrence, $(A_{r,s})^k \cdot n$ est somme de vecteurs de la forme $A^{i_1}X_1 \otimes \ldots \otimes A^{i_r}X_r$ et $A^{j_1}Y_1 \otimes \ldots \otimes A^{j_s}Y_s$ avec $\sum_{p=1}^r i_p = \sum_{j=1}^q j_q = k$. Si on choisit $k \geqslant M := \max(r,s)(N-1)+1$, alors pour tous uplets $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ et $\underline{j} = (j_1, \ldots, j_s)$ il existe deux indices $\alpha, \beta$ tels que $i_\alpha = j_\beta \geqslant N$. (Car par contraposée, si $i_p \leqslant N-1$ pour tout $p$ alors

$k = \sum_p i_p \leqslant r(N-1) < M$.) Alors $A^{i_\alpha} X_\alpha = A^{j\beta} Y_\beta = 0$ ce qui annule $A^{i_1}X_1 \otimes \ldots \otimes A^{i_r}X_r$ et $A^{j_1}Y_1 \otimes \ldots \otimes A^{j_s}Y_s$. Il s'ensuit que $(A_{r,s})^M \cdot n$ est une somme de termes nuls, donc est nul, et ceci pour tout $n$. Comme $M$ ne dépend pas de $n$ on a bien $(A_{r,s})^M = 0$.

$\boxed{1}$ 8.(a) Soient $r, s \geqslant 0$ sont entiers et $n \in \mathcal{N}_{r,s}$ tel que $A_{r,s} \cdot n = 0$. Comme $A'$ une réplique de $A$, alors $A'_{r,s} \cdot n = 0$. Comme de plus $A''$ est une réplique de $A'$, alors $A''_{r,s} \cdot n = 0$. Ceci démontre que $A''$ est une réplique de $A$.

8.(b) À strictement parler, l'espace $\mathcal{N}_{r,s}(E)$ n'a été défini que pour l'espace vectoriel standard $E = K^n$. Pour donner sens à $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'}$ comme dans phrase de l'énoncé qui suit immédiatement la question IV.6, et donner sens à l'expression « $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$ », il faut considérer $\mathcal{N}_{r',s'}(\mathcal{N}_{r,s})$. Or $E = \mathcal{N}_{r,s}$ est un espace vectoriel abstrait, isomorphe canoniquement à $K^{n^r} \oplus (K^{n^s})^*$ comme nous l'avons vu en IV.4 mais pas isomorphe canoniquement à l'espace standard $K^{n^r + n^s}$. (À mon sens, il s'agit là d'une nouvelle faiblesse du sujet.) Éclaircissons donc la définition : l'espace $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'} := \mathcal{N}_{r',s'}(\mathcal{N}_{r,s})$ est l'espace vectoriel engendré (dans un certain gros espace de matrices qu'il n'est ni agréable ni utile d'écrire) par les vecteurs de la forme $X_1 \otimes \cdots \otimes X_{r'} \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_{s'}$ où $(X_i)$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{N}_{r,s} = K^{n^r} \oplus (K^{n^s})^*$ et $(Y_j)$ est une famille de vecteurs de $(\mathcal{N}_{r,s})^* = \mathcal{N}_{s,r} = K^{n^s} \oplus (K^{n^r})^*$. (Dans la dernière phrase, nous avons écrit les isomorphismes canoniques $\mathcal{N}_{r,s} = K^{n^r} \oplus (K^{n^s})^*$ comme des égalités, et utilisé la question 4.)

Supposons que $A'$ est une réplique de $A$. Pour montrer que $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$, nous devons vérifier que pour tout couple d'entiers $r', s' \geqslant 0$, tout $n \in (\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'}$ annulé par $(A_{r,s})_{r',s'}$ est annulé par $(A'_{r,s})_{r',s'}$. Or l'énoncé $\boxed{1}$ nous invite à admettre que $(\mathcal{N}_{r,s})_{r',s'} = \mathcal{N}_{rr'+ss', rs'+sr'}$ canoniquement et que $(A'_{r,s})_{r',s'} = A_{rr'+ss', rs'+sr'}$ dans cette identification. On est donc amené à vérifier que tout vecteur $n \in \mathcal{N}_{rr'+ss', rs'+sr'}$ annulé par $A_{rr'+ss', rs'+sr'}$ est annulé par $A'_{rr'+ss', rs'+sr'}$, ce qui découle de la définition d'une réplique appliquée avec $r := rr' + ss'$ et $s := rs' + sr'$.

9.(a) Si $A'$ est une réplique de $A$, alors en particulier tout vecteur annulé par $A_{1,1}$ est annulé par $A'_{1,1}$. Or d'après la $\boxed{1}$ question 3, $A_{1,1} = \mathrm{ad}_A : M_n(K) \to M_n(K)$, $M \mapsto AM - MA$. La propriété signifie donc que toute matrice commutant avec $A$ commute avec $A'$, c'est-à-dire $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(A')$. En prenant les commutants, on en déduit que $\mathcal{CC}(A') \subset \mathcal{CC}(A)$. $\boxed{1}$ D'après le théorème du bicommutant on a $\mathcal{CC}(A) = K[A]$. L'inclusion montre donc que $A' \in K[A]$, i.e. $A'$ est un polynôme en $A$. Écrivons $A' = P(A)$ où $P \in K[X]$ est un polynôme que l'on peut écrire $P(X) = \alpha + XQ(X)$ avec $\alpha \in K$.

Si $A$ n'est pas inversible, il existe $x \in K^n$ non nul tel que $Ax = 0$. Comme $A'$ est une réplique, on a aussi $A'x = 0$. $\boxed{1}$ En évaluant $A' = P(A) = \alpha \mathbf{I}_n + AQ(A)$ en $x$ on trouve $\alpha x = 0$, donc $\alpha = 0$. Ainsi $A'$ est un polynôme en $A$ sans terme constant.

Si $A$ est inversible, on sait que l'on peut écrire $A^{-1}$ comme un polynôme en $A$ (par exemple en utilisant le théorème $\boxed{1}$ de Cayley Hamilton pour $A$), disons $A^{-1} = R(A)$. Alors $A' = \alpha \mathbf{I}_n + AQ(A) = \alpha A A^{-1} + AQ(A) = A(\alpha R(A) + Q(A))$ qui est un polynôme en $A$ sans terme constant.

$\boxed{1}$ 9.(b) Si $A'$ est une réplique de $A$, alors d'après 8.(b) pour tous $r, s$ l'endomorphisme $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$. D'après 9.(a) ceci implique que $A'_{r,s}$ est un polynôme en $A_{r,s}$ sans terme constant. Réciproquement supposons que pour tous $r, s$, $A'_{r,s}$ est un polynôme en $A_{r,s}$ sans terme constant, ce que l'on peut écrire $A'_{r,s} = A_{r,s} P(A_{r,s})$ pour un $\boxed{1}$ certain polynôme $P$. L'absence de terme constant montre que tout vecteur du noyau de $A_{r,s}$ est dans le noyau de $A'_{r,s}$. La définition d'une réplique de $A$ est donc satisfaite par $A'$.

10.(a) Fixons $r, s \geqslant 0$. La question 7.(a) montre que, sur une extension de corps $L/K$ choisie pour que $D$ soit $\boxed{1}$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(L)$, $D_{r,s}$ est diagonalisable dans dans $\mathcal{M}_n(L)$. Donc $D_{r,s}$ est semi-simple dans $\mathcal{M}_n(K)$. La question 7.(b) montre que $N_{r,s}$ est nilpotente. Puisque $D$ et $N$ commutent, la propriété admise juste avant la question $\boxed{1}$ 9.(a) montre que $[D_{r,s}, N_{r,s}] = [D, N]_{r,s} = 0$. Pour finir il nous reste à observer que $A_{r,s}$ est linéaire en $A$, c'est-à-dire, $\boxed{1}$ que l'application $M_n(K) \to \mathcal{L}(\mathcal{N}_{r,s})$, $A \mapsto A_{r,s}$ est linéaire. Il en découle que $A_{r,s} = (D+N)_{r,s} = D_{r,s} + N_{r,s}$. En résumé les endomorphismes $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ vérifient toutes les propriétés de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford de $A_{r,s}$, dont elles sont les parties semi-simple et nilpotente.

10.(b) Nous avons besoin de montrer en préalable que dans la décomposition $A = D + N$, les matrices $D$ et $N$ sont des polynômes en $A$ sans terme constant. Il suffit de le démontrer pour $D$, car c'est alors clair pour $N = A - D$. Or la construction de $D$ dans la partie III, comme limite d'une suite stationnaire dont tous les termes sont des polynômes $\boxed{2}$ en $A$, montre que $D$ est un polynôme en $A$. On termine comme dans 9.(a) :

1) Si $A$ n'est pas inversible. Sur l'espace caractéristique de $A$ relatif à la valeur propre 0, l'endomorphisme associé à $D$ est nul et en particulier $\ker(A) \subset \ker(D)$. Le raisonnement de 9.(a) montre que $D$ est un polynôme en $A$ sans terme constant.

2) Si $A$ est inversible. Le raisonnement de 9.(a) montre que $D$ est un polynôme en $A$ sans terme constant.

Passons à la question proprement dite. Traitons le cas de $D$, le cas de $N$ étant entièrement similaire. D'après 9.(b) $\boxed{2}$ il suffit de montrer que pour tous $r, s \geqslant 0$, $D_{r,s}$ est un polynôme en $A$ sans terme constant. Or d'après 10.(a), $D_{r,s}$ est la composante semi-simple de $A_{r,s}$. D'après le fait préalable que nous avons établi, appliqué pour $A = A_{r,s}$, $D_{r,s}$ est un polynôme en $A_{r,s}$ sans terme constant. Ceci conclut.

11. …