

Planche Agrégation

2017

29 janvier 2018

Exercice 1 (Gourdon Analyse, Ex.4 p.17)

Soit (E, d) un espace métrique.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est continue sur E .
2. Soient A, B deux fermés disjoints de E
 - a/ Montrer qu'il existe une application $f : E \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $f^{-1}(\{0\}) = A$ et $f^{-1}(\{1\}) = B$.
 - b/ Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U, V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 2 (Rouvière, Ex.55 p.169)

1. Soit X un espace métrique complet non vide, muni d'une distance d . Soit F une application contractante, i.e. telle qu'il existe $k \in (0, 1)$ avec pour tout couple $(x, y) \in X \times X$,

$$d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y).$$

Montrer que F admet un unique point fixe a sur E et que pour toute suite $(x_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n) & n \in \mathbb{N} \\ x_0 \in E \end{cases}$$

alors $(x_n)_n$ converge vers a .

2. Soit X un espace complet compact muni d'une distance d . On considère F une application telle que pour tout couple $(x, y) \in X \times X$ avec $x \neq y$,

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y).$$

Montrer que F admet un unique point fixe sur X .

Exercice 3 (Rouvière, Ex.54 p.167)

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. Soit $A \in E$ inversible. On définit l'application

$$FX \in E \mapsto 2X - XAX.$$

1. Montrer que $F : E \rightarrow E$ définit une application de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle et donner $F(A^{-1})$ et $DF(A^{-1})$.
2. On définit la suite des itérées, pour $X_0 \in E$, $(X_p)_p$ définie par $\forall p \in \mathbb{N}$, $X_{p+1} = F(X_p)$. Montrer que pour X_0 bien choisi on a $X_p \rightarrow A^{-1}$ quand $p \rightarrow \infty$.

Exercice 4 (Gourdon Analyse, Ex.2 p.52)

Soit (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées bornées non vides de E . Pour A, B dans $\mathcal{F}$ on pose

$$\lambda(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$

et

$$\Delta(A, B) = \sup\{\lambda(A, B), \lambda(B, A)\}.$$

1. Montrer que Δ définit une distance sur $\mathcal{F}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$ ayant au moins n points. Montrer que $\mathcal{F}_n$ est un ouvert de $\mathcal{F}$.
3. On suppose maintenant que E est compact.
 - a/ On considère une suite de Cauchy $(Y_n)_n$ de $(\mathcal{F}, \Delta)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} \subset Y_n$. Montrer que cette suite converge vers $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.
 - b/ En déduire que $(\mathcal{F}, \Delta)$ est un espace métrique complet.

Exercice 5 (X-ENS Analyse 4, Ex.4 p.11)

On considère l'application

$$f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto f(M) = (\text{Tr} M, \text{Tr} M^2, \dots, \text{Tr} M^n).$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(Df(M)) = \deg(\mu_M)$ où μ_M est le polynôme minimal de M .
3. Montrer que l'ensemble des matrices telles que le polynôme minimal égale le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Soient E un espace vectoriel normé. Existe-t-il deux endomorphismes continus u et v tels que

$$u \circ v - v \circ u = \text{id}_E?$$

On pourra prouver que pour tout n on a la relation $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$.

Exercice 7 (Caldéro-Germoni 1, p.86)

On souhaite montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A$ (sous l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$) est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Soit $B \in \overline{\mathcal{O}_A}$.
 - a/ Montrer que B est diagonalisable.
 - b/ Montrer que B et A ont même polynôme caractéristique.
 - c/ Conclure que $\mathcal{O}_A$ est fermée.
2. On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
 - a/ En considérant pour $\varepsilon > 0$ la matrice de passage $P = \text{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$, montrer que $\mathcal{O}_A$ admet dans son adhérence une matrice diagonale.
 - b/ Conclure.

Exercice 8 (Rouvière, Ex.12 p.36)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u une application linéaire de E dans E . On définit le rayon spectral de u par

$$\rho(u) = \max_{\lambda \in \text{sp}(u)} |\lambda|.$$

Si $\|\cdot\|$ est une norme de E , on appelle norme associée de u le nombre $\|u\| = \max_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

1. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
 - (i) il existe une norme sur E pour laquelle la norme associée de u soit < 1 ;
 - (ii) $\rho(u) < 1$;
 - (iii) $u^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
2. En déduire que, pour toute application linéaire u sur E ,

$$\rho(u) = \inf(\|u\|)$$

où l'infimum porte sur l'ensemble de toutes les normes d'applications linéaires associées aux différentes normes de E . Cet infimum est-il atteint ?

3. Montrer que, pour toute application u ,

$$\rho(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\|^{1/n},$$

où $\|\cdot\|$ est une norme associée quelconque.