Décomposition de Jordan-Chevalley

La décomposition de Jordan-Chevalley est souvent appelée décomposition de Dunford dans l'enseignement français, sans véritable raison (lire l'introduction de [CEZ] pour savoir pourquoi). Son énoncé le plus classique est le suivant : *soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P est scindé. Alors il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes de E, tel que $f = d + n$, d est diagonalisable, n est nilpotent, et d et n commutent. De plus d et n sont des polynômes en f.*

Exercice 1 (*Décomposition de Jordan-Chevalley, preuve classique, voir [MM]*)
On conserve les notations ci-dessus. On note encore $P = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ où $P_i = X - \lambda_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f, et $E_i = \ker P_i^{\alpha_i}(f)$ appelé *sous-espace caractéristique associé à λ_i*.

1. Montrez que les polynômes $Q_i := \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. On choisit une relation de Bézout $U_1 Q_1 + \cdots + U_r Q_r = 1$. Montrez qu'on a la décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ et que $\pi_i := U_i(f) \circ Q_i(f)$ est le projecteur sur E_i associé à cette décomposition.
3. Montrez que les endomorphismes $d := \sum_k \lambda_k \pi_k$ et $n := f - d$ vérifient les conditions requises pour la décomposition de Jordan-Chevalley.
4. Démontrez que si $f = d' + n'$ est une autre décomposition de Jordan-Chevalley, on a $d' = d$ et $n' = n$. (*Commencez par démontrer que d' commute avec d.*)

Exercice 2 (*Extrait du sujet Math Géné 2009*)
On considère A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ et on introduit l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\Phi_{A,B} : M \mapsto AM + MB.$$

1. En supposant que A est diagonalisable et que $B = 0$, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
2. En supposant A et B diagonalisables, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
3. Démontrer la réciproque, c'est-à-dire que si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, A et B le sont. (*Indication* : On pourra utiliser la décomposition de Jordan-Dunford de A et B)
4. Lorsque A et B sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de ceux de A et de ${}^tB$.

Exercice 3 (*Décomposition de Jordan-Chevalley multiplicative*)
On rappelle qu'un endomorphisme u est dit *unipotent* si $u - \mathrm{id}$ est nilpotent. Avec les notations de l'introduction, on suppose de plus que f est un endomorphisme inversible. Démontrez qu'il existe un unique couple (d,u) d'endomorphismes de E, tel que $f = du$, d est diagonalisable, u est unipotent, et d et u commutent. De plus d et u sont des polynômes en f.

Exercice 4 (*Décomposition de Jordan-Chevalley sur $\mathbb{R}$*)
On dit qu'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est *semi-simple* si elle est diagonalisable, vue comme élément de $M_n(\mathbb{C})$. Démontrez que pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de matrices (S,N) tel que $M = S + N$, S est semi-simple, N est nilpotente, et S et N commutent. De plus S et N sont des polynômes en M.

Remarque. La décomposition de Jordan-Chevalley apparaît dans le sujet Math Géné 2017 où il en est donné une preuve algorithmique que nous verrons en cours. Notons par ailleurs qu'elle peut être raffinée en ce qu'on appelle la décomposition de Jordan ; celle dernière fait des apparitions importantes dans le sujet Math Géné 2010.

Références

[CEZ] D. Couty, J. Esterle, R. Zarouf, *Décomposition effective de Jordan-Chevalley*, Gazette des Mathématiciens no 129 (2011), 29–49, disponible à l'adresse `http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2011/129/smf_gazette_129_29-49.pdf`

[Gou] X. Gourdon, *Algèbre*, Ellipses, 2009.

[MM] R. Mansuy, R. Mneimné, *Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes*, Vuibert (2012).