Actions de groupes, 2

Références suggérées : Perrin (*Cours d'algèbre*, chap. I), Calais (*Éléments de théorie des groupes*, chap. V), Combes (*Algèbre et géométrie*, chap. 2), Ulmer (*Théorie des groupes*, chap. 4), Delcourt, *Théorie des groupes*, Francinou-Gianella-Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 1.*

Exercice 1 (*Produit de sous-groupes*)
Soit G un groupe. Si H, K sont deux sous-groupes, on note HK l'ensemble des produits hk avec $h \in H$ et $k \in K$, et on l'appelle le *produit* de H et K.

1. Démontrez qu'on a une bijection $(H \times K)/(H \cap K) \xrightarrow{\sim} HK$. En particulier, si H et K sont finis alors HK est fini de cardinal $|H||K|/|H \cap K|$. *Indication : faire agir $H \times K$ sur HK.*
2. Démontrez que si H ou K est distingué dans G, alors HK est un sous-groupe de G.
3. Donnez un exemple dans lequel HK n'est pas un sous-groupe de G.

Exercice 2 (*Groupes d'ordre pq*) [Perrin, chap. I, th. 7.13, Calais, VI.2, Ulmer ex. 9.6]
Démontrez qu'un groupe d'ordre pq avec p, q nombres premiers distincts n'est pas simple.
Indication : utilisez le troisième théorème de Sylow.

Exercice 3 (*Groupe d'ordre* 340) [Ulmer ex. 9.4]
Montrez qu'un groupe d'ordre 340 possède un sous-groupe distingué d'ordre 85.

Exercice 4 (*Engendrement du groupe* $\mathrm{SL}(E)$ *par les transvections*) [Perrin, chap. IV]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. Une *transvection* est un endomorphisme $u \in \mathrm{SL}(E)$ tel que $u(t) = t + f(t)a$ où $f \in E^*$ est une forme linéaire et $a \in E \setminus \{0\}$. L'hyperplan $H = \ker(f)$ est déterminé par u de manière unique. On souhaite démontrer que les transvections engendrent le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(E)$.

1. Supposons $\dim(E) \geqslant 2$ et soient $x, y \in E - \{0\}$. On souhaite montrer qu'il existe u, produit de une ou deux transvections, tel que $u(x) = y$.
   (a) Si x et y ne sont pas colinéaires, on choisit un hyperplan H contenant $y - x$ mais pas x. On pose $a = y - x$ et $u(t) = t + f(t)a$ avec $H = \ker(f)$ et $f(x) = 1$. Montrez que u convient.
   (b) Si x et y sont colinéaires, choisir un $z \in E$ qui ne leur est pas colinéaire et conclure avec (a).
2. Soit $x \in E - \{0\}$ et H_1, H_2 hyperplans distincts tels que $x \notin H_1 \cup H_2$. On souhaite montrer qu'il existe une transvection u telle que $u(x) = x$ et $u(H_1) = H_2$.
   (a) Montrez que $H := H_1 \cap H_2 + kx$ est un hyperplan de E et que $E = H + H_1 = H + H_2$.
   (b) Montrez que $H_2 \not\subset H$. On choisit $z \in H_2 \setminus H$ que l'on écrit $z = a + y$ avec $a \in H$ et $y \in H_1$.
   (c) Montrez qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $H = \ker(f)$ et $f(y) = 1$.
   (d) Montrez que la transvection u définie par $u(t) = t + f(t)a$ répond à la question.
3. Soit H un hyperplan de E et $x \in E \setminus H$. Montrez que toute transvection de H s'étend en une transvection u de E telle que $u(x) = x$.
4. Démontrez par récurrence sur E que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$.
   Indications : lorsque $n \geqslant 2$, soit $v \in \mathrm{SL}(E)$. Soit $x \in E - \{0\}$. Utilisez 1 pour montrer que quitte à composer v avec des transvections, on peut supposer que $v(x) = x$. Utilisez 2 pour montrer de même qu'on peut supposer que $v(H) = H$. Utilisez l'hypothèse de récurrence et 3 pour conclure.

Exercice 5 (*Groupes d'ordre p^2q*) [Ulmer ex. 9.7, Perrin, exercices du chap.I, partie E]
Démontrez qu'un groupe d'ordre p^2q avec p, q nombres premiers distincts n'est pas simple.