Formes sesquilinéaires

[Sujet Math Géné 2002] On appelle *espace sesquilinéaire (symétrique)* un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$ muni d'une forme sesquilinéaire (symétrique) b.

1 Espaces sesquilinéaires symétriques

Si (E, b) est un tel espace, une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E est dite *orthogonale* si $b(e_i, e_j)$ est nul pour tous $i \neq j$. On dira qu'elle est *semi-orthonormée* si elle est orthogonale et si de plus $b(e_i, e_i)$ est, pour tout i, égal à 1, 0 ou -1.

1. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. On suppose b non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $b(x, x)$ soit non nul. Montrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que $b(y, y)$ soit égal à 1 ou à -1.
2. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée de (E, b).
3. On suppose que E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ et que la forme b est définie par la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Construire une base semi-orthonormée de (E, b).
4. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base semi-orthonormée de (E, b). Soit E_+ (resp. $E-$, E_0) le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_i vérifiant $b(e_i, e_i) = 1$ (resp. $b(e_i, e_i) = -1$, $b(e_i, e_i) = 0$). Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que $F \cap (E_- \oplus E_0)$ est nul si b est définie positive sur F et que $F \cap (E_+ \oplus E_0)$ est nul si b est définie négative sur F.
   (b) En déduire que le nombre $\sum_i b(e_i, e_i)$ est indépendant de $\mathcal{B}$. Ce nombre sera noté $\sigma(E, b)$ ou simplement $\sigma(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.
5. Soient $n > 0$ un entier et E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :
$$b(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Calculer le nombre $\sigma(E)$.
6. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit x un vecteur non nul de E.
   (a) On suppose que x appartient à $E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que : $x = e_1$.
   (b) On suppose que $b(x, x)$ est non nul. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et un réel $\lambda > 0$ tels que : $x = \lambda e_1$.
   (c) On suppose que $b(x, x)$ est nul et que x n'appartient pas à $E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que : $x = e_1 + e_2$.
7. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $F = \mathbb{C}x$ le sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul $x \in E$ et $G = F^\perp$ son orthogonal. Déterminer l'espace G suivant les cas examinés dans la question 6. Montrer que l'on a dans tous les cas : $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$.
8. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $G = F^\perp$ son orthogonal. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une base semi-orthonormée de (F, b). Pour tout $i \leqslant p$ notons F_i le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs u_j, $j \leqslant i$, et G_i l'orthogonal $F_i^\perp$ de F_i. Déterminer (en fonction de $\sigma(E)$) les nombres $\sigma(F_i) + \sigma(G_i)$. En déduire la formule :
$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(F^\perp).$$

2 Espaces sesquilinéaires

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appellera *orthogonal à droite* (resp. *orthogonal à gauche*) de F l'ensemble noté $F^\perp$ (resp. ${}^\perp F$) des vecteurs x de E qui vérifient :

$$\forall y \in F \quad b(y, x) = 0 \quad \text{(resp. } b(x, y) = 0\text{)}$$

On dira que la forme b est *non dégénérée* si $E^\perp$ et ${}^\perp E$ sont nuls. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on dira que b est *non dégénérée sur* F si la restriction de b à F est non dégénérée.

1. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit M la matrice de b dans cette base, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les nombres $b(e_i, e_j)$.
   (a) Soient x et y deux vecteurs de E et X et Y les matrices colonnes ayant comme coefficients les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer la formule :

   $$b(x, y) = {}^t X M \overline{Y}$$

   ${}^t X$ étant la transposée de X et $\overline{Y}$ la matrice colonne dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de Y.
   (b) Montrer que b est non dégénérée si et seulement si M est inversible.
   (c) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   — b est non dégénérée
   — $E^\perp = 0$
   — ${}^\perp E = 0$.
2. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   (a) Montrer que $F^\perp$ et ${}^\perp F$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (b) Montrer les inégalités :

   $$\dim F + \dim F^\perp \geqslant \dim E \qquad\qquad \dim F + \dim {}^\perp F \geqslant \dim E$$

   Montrer que ces inégalités sont des égalités si b est non dégénérée (sur E).
   (c) On suppose que b est non degenérée sur F. Montrer les égalités :

   $$E = F \oplus F^\perp = F \oplus {}^\perp F$$

3. Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2). Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :

   $$\forall i \in \{1, 2\} \qquad b(e_i, e_1) = 0 \quad \text{et} \quad b(e_i, e_2) = 1$$

   Déterminer un sous-espace vectoriel F de E tel que $F^\perp$ et ${}^\perp F$ n'aient pas la même dimension.
4. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Montrer qu'il existe un endomorphisme bijectif f de E tel que la forme $(x, y) \mapsto b(f(x), y)$ soit une forme sesquilinéaire symétrique.
5. Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit ε un complexe. On dit que b est *ε-symétrique* si l'on a :

   $$\forall x \in E, \forall y \in E \qquad b(x, y) = \varepsilon \overline{b(y, x)}$$

   On dira dans ce cas que (E, b) est ε-symétrique.
   (a) Montrer que si la forme b est ε-symétrique et non nulle, on a : $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$.
   (b) Soit ε un nombre complexe tel que $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$. Donner un exemple d'espace sesquilinéaire (E, b) où b est ε-symétrique et non nulle.