Maintenant que les orbites sont munies d'une topologie, considérons à nouveau la bijection

$$\overline{\alpha_A} : \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/G_A \longrightarrow \mathscr{O}_r,$$

où A est une matrice fixée de rang r. Il est raisonnablement naturel de se demander :

▷ comment mettre une topologie sur le quotient $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/G_A$?

▷ peut-on espérer que $\overline{\alpha_A}$ soit continue ? Voire que ce soit un homéomorphisme, c'est-à-dire que sa bijection réciproque soit aussi continue ?

Ces questions motivent l'introduction de topologie dans les actions, ce qui est l'essentiel du chapitre II.

A. Annexe. Vocabulaire des actions de groupes

Ce paragraphe un peu austère a vocation à rappeler les concepts essentiels pour la manipulation des actions de groupes.

A.1. Définitions

A.1.1. Définition. Soit G un groupe et X un ensemble. On appelle *action à gauche* ou *opération à gauche* ou, plus simplement, *action* ou *opération de G sur X* une application $\alpha : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que :

1. $\forall (g, g') \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$,
2. $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$ (où e est le neutre de G).

A.1.2. Remarque. On associe à l'action α le morphisme $\psi : G \to \mathfrak{S}(X)$, $g \mapsto \psi_g$ de G vers le groupe $\mathfrak{S}(X)$ des permutations de X dans X défini par : $\psi_g(x) = g \cdot x$ pour g de G et x de X.

Inversement, étant donné un morphisme $\psi : G \to \mathfrak{S}(X)$, on définit une action par $\alpha(g, x) = \psi_g(x)$ pour g de G et x de X.

A.1.3. Mise en garde. Ainsi, les données de α et de ψ sont équivalentes, mais il ne faut pas les confondre. En particulier, α n'est pas un morphisme ou, par exemple, une application partielle $G \to X$, $g \mapsto g \cdot x$ non plus (eh ! l'ensemble X n'est pas un groupe en général) ; en tout état de cause, le stabilisateur d'un point x n'est pas un noyau (il n'est pas distingué en général).

Ainsi, si l'on parle du « noyau de l'action », il faut comprendre le noyau du morphisme ψ.

A.1.4. Remarque. On définit de même une *action à droite* de G sur X comme étant une application $\beta : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto x \cdot g$, telle que

1. $\forall (g, g') \in G,\ \forall x \in X,\ x \cdot (g \cdot g') = x \cdot (gg')$,
2. $\forall x \in X,\ x \cdot e = x$ (où e est le neutre de G).

On vérifie immédiatement qu'une application $\beta : G \times X \to X$ est une action à droite si et seulement si l'application $\alpha : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto x \cdot g^{-1}$ (c'est-à-dire, $\alpha(g, x) = \beta(g^{-1}, x)$ pour tout (g, x)) est une action à gauche.

A.1.5. Définition. Soit $\alpha : G \times X \to X$ une action. *L'orbite* d'un point x de X est l'ensemble noté $\mathscr{O}_x$ ou $\mathrm{Orb}(x)$ ou $G \cdot x$ défini par :

$$G \cdot x = \{g \cdot x\ ,\quad g \in G\}.$$

L'action est dite *transitive* si elle n'admet qu'une seule orbite : pour tout x de X, $G \cdot x = X$; autrement dit, pour x et x' quelconques dans X, il existe g de G tel que $x' = g \cdot x$.

A.1.6. Définition. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On appelle ensemble quotient de X par G l'ensemble des orbites de X pour l'action de G. Cet ensemble sera noté X/G.

C'est le moment d'introduire la définition la plus fumeuse de l'ouvrage, mais pourtant bien utile : la notion de *forme normale*. Dans une orbite, on choisira un représentant plus agréable que les autres et on l'appellera forme normale (de l'orbite). Ce choix peut dépendre de plusieurs facteurs : affectivité, simplicité, visibilité seront les critères principaux. Comme on peut le constater, on nage dans le subjectif, il est donc pertinent de parler de normalité. Un petit résumé sur les formes normales pourra être trouvé dans l'annexe II-E.

A.1.7. Définition. Soit $\alpha : G \times X \to X$ une action. Le *stabilisateur* ou *groupe d'isotropie* d'un point x de X est le sous-groupe noté $\mathrm{Stab}_G(x)$ ou encore G_x défini par :

$$\mathrm{Stab}_G(x) = G_x = \{g \in G\ ,\quad g \cdot x = x\}.$$

L'action est dite *libre* si tous les stabilisateurs sont triviaux, *i.e.* réduits au neutre e : pour tout x de X, $G_x = \{e\}$.

A.1.8. Remarque (Importance du stabilisateur). Il y a au moins quatre types de raisons pour s'intéresser aux stabilisateurs des points de X : ils permettent d'identifier une orbite à un quotient G/G_x (c'est la raison principale, voir le théorème I-3.2), ils donnent un critère pour qu'une action soit doublement transitive (on veut que, pour tout x, G_x agisse transitivement sur $X\backslash\{x\}$), ils permettent de donner un analogue des « cercles » dans un contexte très général, voir exercice I-A.1.9, ils permettent de voir si une action reste transitive par restriction à un sous-groupe, voir proposition I-A.1.12.

A.1.9. Exercice. *Dans le cadre de l'action d'un groupe G sur un ensemble X, on convient d'appeler cercle de centre $A \in X$, passant par $B \in X$, l'orbite, $G_A \cdot B$, de B pour le stabilisateur de A. Montrer que l'on retrouve notre bonne vieille notion de cercle en considérant l'action naturelle du groupe orthogonal* $\mathrm{O}(2)$ *(ou même* $\mathrm{SO}(2)$*), sur le plan vectoriel euclidien.*

Voici tout de suite une première proposition essentielle pour la compréhension de la relation entre groupes et orbites.

A.1.10. Proposition. *Soit G un groupe opérant sur un ensemble X et x dans X. Alors, $G_{g\cdot x} = gG_xg^{-1}$.*

Démonstration. On a $\left(gG_xg^{-1}\right) \cdot (g \cdot x) = (gG_x) \cdot x = g \cdot x$. On en déduit l'inclusion $gG_xg^{-1} \subset G_{g\cdot x}$. En remplaçant x par $g \cdot x$ et g par g^{-1} dans la formule, il vient $g^{-1}G_{g\cdot x}g \subset G_{g^{-1}\cdot(g\cdot x)}$, ce qui donne l'inclusion inverse, c'est-à-dire $G_{g\cdot x} \subset gG_xg^{-1}$. □

A.1.11. Remarque. Il y a ici une chose essentielle qu'il faut retenir sur les groupes : il y a deux mondes, celui des groupes et celui des objets sur lesquels les groupes agissent. La translation dans le monde des objets (comprendre $x \mapsto g\cdot x$ dans X) se traduit en une conjugaison dans le monde des groupes (comprendre $h \mapsto ghg^{-1}$ dans G). De grandes confusions se dissiperont après lecture en boucle de ce principe.

Si G est un groupe agissant transitivement sur un ensemble X, on peut se demander si l'action est encore assez « puissante » pour rester transitive après restriction à un sous-groupe H pas trop petit. Tout dépend bien sûr du stabilisateur d'un élément de X. Ce critère sera utile dans la suite pour montrer qu'une action transitive le reste après restriction à un sous-groupe.

A.1.12. Proposition. *Soit G un groupe agissant transitivement sur un ensemble X et H un sous-groupe de G. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) Le sous-groupe H agit transitivement sur X.

(ii) Il existe x dans X tel que $G = HG_x$.

(iii) Il existe x dans X et une famille $(g_i)_{i\in I}$ de représentants dans G de $H\backslash G$ telle que $g_i \in G_x$ pour tout i.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Prenons (en fait) x quelconque dans X. Soit g dans G, on veut montrer que $g \in hG_x$, avec $h \in H$. On pose $y = g \cdot x$.

Par hypothèse, il existe h dans H tel que $h \cdot x = y$. Cela prouve que $h^{-1}g \in G_x$, d'où l'assertion.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Par hypothèses, on a $G = \bigcup_{g\in G_x} Hg$. Or, les classes Hg sont soit égales, soit disjointes. On peut donc extraire de G_x une famille $(g_i)_{i\in I}$ telle que $G = \bigcup_{i\in I} Hg_i$, où la réunion est cette fois disjointe. Cela prouve la conclusion voulue.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Avec les hypothèses, il vient

$$H \cdot x = \bigcup_{i\in I} H \cdot x = \bigcup_{i\in I} H \cdot (g_i \cdot x) = \bigcup_{i\in I} (Hg_i) \cdot x = G \cdot x = X.$$

Cela prouve la transitivité de H.

□

A.1.13. Définition (Propriétés d'une action). Soit $\alpha : G \times X \to X$ une action d'un groupe G sur un ensemble X.

L'action est dite :

- ▷ *fidèle* si l'intersection des stabilisateurs des points de X est triviale, *i.e.* s'il n'existe pas d'éléments de G autre que e qui fixe tous les points de X, *i.e.* si le noyau du morphisme de l'action est trivial ;
- ▷ *libre* si tous les stabilisateurs des points de X sont triviaux ;
- ▷ *doublement transitive* si, étant donné deux couples (x_1, x_2) et (y_1, y_2) d'éléments distincts de X, il existe g de G tel que $g{\cdot}x_1 = y_1$ et $g{\cdot}x_2 = y_2$;
- ▷ *n fois transitive* (où n est un entier naturel non nul) si, étant donné deux n-listes $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments deux à deux distincts de X, il existe g de G tel que $g \cdot x_i = y_i$ pour tout i ; on dit qu'elle est *n fois simplement transitive* si, de plus, un tel g est unique ;
- ▷ *simplement transitive* si elle est une fois simplement transitive, c'est-à-dire si pour tout x, y de X, il existe un unique g de G tel que $g \cdot x = y$. Notons que dans ce cas, l'application $g \mapsto g \cdot x$ est une bijection de G vers X pour tout x de X.

A.1.14. Exercice. *Montrer qu'une action est doublement transitive si et seulement si la restriction de l'action à chacun des stabilisateurs des points de X est transitive sur $X \setminus \{x\}$*(autrement dit, pour tout x de X, le groupe G_x agit transitivement sur $X \setminus \{x\}$).

◇

A.1.15. Exemple. L'action du groupe linéaire sur les droites est transitive mais pas fidèle : les homothéties agissent trivialement.

Une action induit une action fidèle du quotient du groupe par le noyau de l'action, *i.e.* le noyau du morphisme associé à l'action.

A.1.16. Exemple (*E uno plures*)

Si G agit sur X et n est un entier naturel non nul, on obtient une action dite *diagonale* de G sur X^n par la formule :

$$\forall g \in G,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n, \quad g \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (g \cdot x_1, \ldots, g \cdot x_n).$$

A.1.17. Remarque. Soit $\alpha : G \times X \to X$ une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X. Pour tout ensemble Y, on hérite d'une action sur l'ensemble $\mathscr{F}(X, Y)$ des applications de X dans Y comme suit : pour g élément du groupe, f application de X dans Y, on définit $g \cdot f$ par :

$$\forall x \in X, \quad g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x).$$

La présence de l'inverse est nécessaire pour avoir une action à gauche et non à droite.

De plus, si $Y = \mathbb{K}$ est un corps, $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel (l'espace des fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$), et l'action ainsi définie est linéaire : autrement dit, c'est une *représentation linéaire* de G. C'est une idée fondamentale en théorie des représentations : une action géométrique intéressante de G sur X donne lieu à des représentations linéaires intéressantes de G. Elle sera largement illustrée dans notre étude des représentations des sous -groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ dans [7, Chap. X et XI].

Bien sûr, avec des groupes et des ensembles infinis, il y a trop de fonctions. On ne prend alors que les fonctions continues, ou dérivables, ou polynomiales, ou bien on considère des avatars de fonctions : distributions, sections de fibrés, etc.

A.1.18. Exercice. *On suppose que le groupe G agit sur l'ensemble X et donc sur l'ensemble des fonctions $\mathscr{F}(X, Y)$ comme ci-dessus. On note*

$$\mathscr{F}(X, Y)^G := \{f \in \mathscr{F}(X, Y),\ g \cdot f = f, \forall g \in G\}$$

l'ensemble des fonctions G-invariantes de X dans Y.

1. *Montrer que si f vérifie $g \cdot f = f$ pour un g de G, alors $h \cdot f = f$ pour tout h dans le sous-groupe $\langle g \rangle$ engendré par g.*

   Le stabilisateur de f contient g et, comme c'est un sous-groupe, il contient $\langle g \rangle$.

2. *En déduire que si f vérifie $g \cdot f = f$, alors la fonction f définit par passage au quotient une fonction $\overline{f}$ de $X/\langle g \rangle$ vers Y telle que $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, où $\overline{x}$ désigne l'orbite de x. En déduire que l'ensemble des fonctions de X vers Y invariantes par g est en bijection avec $\mathscr{F}(X/\langle g \rangle, Y)$.*

   Soit h dans $\langle g \rangle$. On a $f(h \cdot x) = (h^{-1} \cdot f)(x) = f(x)$, par invariance. L'action passe donc bien au quotient.

   On considère l'application ι qui envoie f sur $\overline{f}$, qui est bien définie par ce qui précède. On note que $f = \iota(f) \circ \pi_g$, où π_g désigne l'application quotient $X \to X/\langle g \rangle$. Cela prouve facilement que ι est injective, surjective, et donc bijective de $\mathscr{F}(X, Y)^{\langle g \rangle}$ vers $\mathscr{F}(X/\langle g \rangle, Y)$.

A.1.19. Remarque. *Cet exercice trouvera une application haute en couleurs au moment de l'étude des solides platoniciens, voir [6, Exercice C6].*

◇

Actions d'un groupe sur lui-même

A.1.20. Définition. Soit G un groupe. On définit trois actions de G sur lui-même :

- ▷ par *translations à gauche* : l'action de g sur h est : $g \cdot h = gh$;
- ▷ par *translations à droite* : l'action de g sur h est : $g \cdot h = hg^{-1}$;
- ▷ par *conjugaison* : l'action de g sur h est : $g \cdot h = ghg^{-1}$.

L'action d'un groupe G par translations est libre et transitive. L'action par conjugaison n'est jamais libre (sauf groupe trivial) et pas nécessairement fidèle : son noyau est le *centre du groupe*, souvent noté $Z(G)$.

A.1.21. Définition. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G. On appelle *centralisateur* de H l'intersection des stabilisateurs des éléments de H pour l'action par conjugaison :

$$Z_G(H) = \{g \in G \ , \ \ \forall h \in H, \ ghg^{-1} = h\}.$$

(Ainsi, par exemple, le centre de G est : $Z(G) = Z_G(G)$.)

Ces actions induisent des actions sur les parties de G : par exemple, si g est un élément de G et V une partie de G, la partie gV est l'ensemble des éléments gh où h parcourt V ; la partie gVg^{-1} est l'ensemble des ghg^{-1} où h parcourt V, etc.

A.1.22. Définition. Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G. On appelle *normalisateur* de H le stabilisateur de H pour l'action par conjugaison :

$$N_G(H) = \{g \in G\ ,\ \ \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H\}.$$

A.1.23. Exercice. *Montrer que le normalisateur de H dans G est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.*

On suppose maintenant le groupe fini. Montrer que le cardinal de l'ensemble des sous-groupes de G qui sont conjugués à H est égal à l'indice de $N_G(H)$ dans G, c'est-à-dire au cardinal de l'ensemble quotient $G/N_G(H)$.

On voit directement que H est inclus dans $N_G(H)$. Par construction, H est distingué dans son normalisateur, puisque qu'il est stable par action par conjugaison de son normalisateur. Maintenant, si H est distingué dans un sous-groupe N de G, l'action par conjugaison de N stabilise H et donc $N \subset N_G(H)$.

La dernière question est juste une application du théorème 3.2.

◇

A.1.24. Exercice. *Montrer que le centralisateur d'un sous-groupe est un sous-groupe distingué de son normalisateur. Exemple : quel est le quotient du normalisateur par H lorsque G est le groupe linéaire et H le groupe des matrices diagonales ?*

Soit g dans le normalisateur de H, c dans le centralisateur de H, et h dans H. Alors, $g^{-1}hg$ est dans H et, donc, c le centralise. On a ainsi

$$gcg^{-1}h = gc(g^{-1}hg)g^{-1} = g(g^{-1}hg)cg^{-1} = h(gcg^{-1}.$$

Donc, gcg^{-1} est encore dans le centralisateur de H.

Pour la dernière question, le quotient est le groupe symétrique qui permute les éléments de la diagonale ! On le verra au moment de [?, I-3], voir aussi l'exercice III-D.6. Cet exemple est crucial pour étendre la décomposition de Bruhat aux groupes classiques.

◇

Principe de translation

A.1.25. Principe. *Dans l'action d'un groupe (resp. d'un groupe topologique, d'un groupe de Lie) sur lui-même par translations (à gauche ou à droite), la translation par un élément g est une bijection (resp. un homéomorphisme, un difféomorphisme). Aussi, elle permet d'étendre des propriétés vraies au voisinage du neutre vers un voisinage de g. (Par exemple, le neutre e est un point isolé ou pas de G ; le singleton $\{e\}$ est fermé ; si une partie V est un voisinage [...] du neutre, gV est un voisinage [...] de g, etc.)*

Principe de conjugaison

A.1.26. Principe (D. Perrin [20] – M. Audin [2]). *Si g est un élément d'un groupe de transformations G sur un ensemble X,*

(i) *un conjugué hgh^{-1} de g par un élément $h \in G$ est « de même nature géométrique » que g ;*

(ii) *les éléments définissant cette « nature » sont, pour le conjugué hgh^{-1}, les images, dans X, de ceux de g par h.*

Dans les exemples qui suivent, on illustre ce principe : à chaque fois que l'on conjugue par g, l'effet de la conjugaison, sur la géométrie sur laquelle le groupe G agit, se fait par image directe par g. Et réciproquement ! Le deuxième exemple est emblématique : lorsque l'on prend (l'image directe) de x par h, le stabilisateur de x est changé en son conjugué par h.

Prenez une minute pour méditer sur ce principe qui changera votre vie.

A.1.27. Exemples. Voici une batterie d'exemples plus ou moins familiers.

1. Soit $G = \mathfrak{S}_n$ un groupe symétrique. Le conjugué d'un p-cycle est un autre p-cycle, et, plus précisément, si $g = (i_1, \ldots, i_p)$ est un p-cycle, hgh^{-1} est le p-cycle $\big(h(i_1), \ldots, h(i_p)\big)$.
2. Dans une orbite, tous les stabilisateurs sont conjugués, voir proposition I-A.1.10. Plus précisément, soit G un groupe opérant sur un ensemble X. Pour $x \in X$, on note G_x son stabilisateur. Alors,
$$G_{h \cdot x} = hG_xh^{-1}.$$
3. Soit G agissant sur un ensemble X. Pour tout k de G, on note
$$X^k := \{x,\, k.x = x\},$$
l'ensemble des k-invariants dans X. Alors, $X^{hgh^{-1}} = h(X^g)$, pour h et g quelconques.
4. Soit g une rotation d'axe D et h une isométrie. Alors, hgh^{-1} est encore une rotation, d'axe $h(D)$ (et de même angle).
5. Soit g et h deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, avec h inversible. Soit E_λ le sous-espace propre de g pour la valeur propre λ. Alors, $h(E_\lambda)$ est le sous-espace propre de hgh^{-1} pour la valeur propre λ.

On utilise très souvent le principe de conjugaison dans des situations de commutation : si h commute avec g, alors h stabilise les éléments caractéristiques de g (par exemple points fixes, sous-espaces propres...).

A.1.28. Lemme

1. *Soit g et h deux éléments qui commutent dans un groupe G. On suppose que le groupe G agit sur un ensemble X, l'ensemble des points fixés par g est stable par h.*
2. *On suppose que g et h sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel et que ceux-ci commutent. Alors, tout sous-espace propre de g est stable par h.*

Démonstration.

1. Soit X^g l'ensemble des éléments de X stabilisés par g et x dans X^g. Alors,
$$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x = (hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot x.$$
On en déduit que $h \cdot x \in X^g$ (en fait, on peut aussi le voir comme un cas particulier de l'exemple 3 ci-dessus).
2. Soit E_λ le sous-espace propre de g pour la valeur propre λ et v dans E_λ. Alors,
$$g\big(h(x)\big) = (gh)(x) = (hg)(x) = h\big(g(x)\big) = h(\lambda x) = \lambda h(x).$$
On en déduit que $h(x) \in E_\lambda$.

□

Le lemme suivant sera utilisé plusieurs fois, sinon dans la lettre, du moins dans l'esprit.

A.1.29. Lemme. *Soit G un sous-groupe du groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *Supposons que pour toute droite D de $\mathbb{K}^n$, il existe un élément h de G dont la droite D est un sous-espace propre, c'est-à-dire $D = \mathrm{Ker}(h - \lambda \mathrm{I}_n)$ pour un scalaire λ convenable. Alors, le centre de G est constitué des homothéties qui appartiennent à G. En particulier, le centre de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est le sous-groupe* $\mathbb{K}^*\mathrm{I}_n$ *des homothéties de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. En effet, si g est un élément du centre de G, alors, par le principe de conjugaison, lemme I-A.1.28, les hypothèses impliquent que toute droite est stable par g. Il en résulte que g stabilise toute droite, et g est donc une homothétie, par la proposition II-4.4.6. Réciproquement, toute homothétie commute avec tout élément de G. Cela prouve la première assertion.

On considère l'espace $\mathbb{K}^n$, muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$.

Il suffit maintenant de montrer que toute droite peut être réalisée comme sous-espace propre d'un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

On vérifie que la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & 1 & \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

possède $\mathbb{K}e_n$ comme droite propre pour la valeur propre 1.

Soit D une droite quelconque de $\mathbb{K}^n$. On peut trouver, par le théorème de la base incomplète, une base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que D soit engendrée par e'_n. Par le principe de translation, on voit facilement que D est droite propre pour la valeur propre 1 de PA_nP^{-1}, où P est la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ vers $(e'_1, \dots, e'_n)$, *i.e.* $Pe_i = e'_i$ pour tout i.

Comme on a bien sûr $PA_nP^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il en résulte par ce qui précède que le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est réduit aux homothéties $\mathbb{K}^*\mathrm{I}_n$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.[4] □

A.1.30. Exemple. On vient de voir que, lorsque G est le groupe linéaire, le lemme s'applique.

Pour le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ ou le groupe unitaire $U(n)$, c'est encore plus facile : pour v vecteur non nul, la réflexion d'hyperplan qui fixe $v^\perp$ convient.

A.1.31. Remarque. On trouvera dans l'exercice I-C.8 une variante instructive prouvant que le centre du groupe orthogonal est réduit à ses homothéties, c'est-à-dire $\pm\mathrm{I}_n$.

A.2. Étudier une action

Voici un programme générique pour étudier une action d'un groupe G sur un ensemble (ou un espace topologique) :

- ▷ classer les orbites (par un ensemble combinatoire assez simple) ;
- ▷ trouver une « forme normale » (c'est-à-dire, un élément « plus simple que les autres » dans chaque orbite) ;
- ▷ (dans le cadre topologique) décrire les adhérences de chaque orbite.

C'est parfois très facile : pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K}$ est un corps et n un entier naturel), il y a deux orbites : l'ensemble des vecteurs non nuls et le singleton $\{0\}$; comme forme normale, on peut choisir le premier vecteur de la base canonique ; le vecteur nul forme une orbite fermée qui est dans l'adhérence de l'autre orbite.

Lorsque l'action est plus riche, c'est souvent plus compliqué : le théorème d'inertie de Sylvester classe les orbites de formes quadratiques réelles sous l'action du groupe linéaire par leur signature, voir définition V-B.3.3.

[4]Notez que l'utilisation de la matrice A_n rend valide la preuve sur tout corps, même le corps $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.