Eléments d'Analyse Fonctionnelle

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

4 octobre 2018

1 Compacité des ensembles de fonctions régulières

1.1 Convergence uniforme

Proposition

Soit (X, τ) un espace topologique, (Y, d) un espace métrique. Soit $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions $X \to Y$ muni de la distance de la convergence uniforme :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \in [0, +\infty], \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X, Y).$$

Si Y est complet, alors $(\mathcal{F}(X, Y), d)$ est complet.

Démonstration

1. Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(X, Y)$ une suite de Cauchy pour d. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad d(f_n(x), d_{n+p}(x)) < \varepsilon.$$

Soit $x \in X$. Alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d(f_{n+p}(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

i.e. que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans (Y, d) complet, donc convergente : soit $f_n(x) \to f(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 > 0$ tel que
$$\forall x \in X, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d(f_{n+p}(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$
On fixe $n \geq n_0$. Alors :
$$\forall x \in X, \quad \lim_{p \to +\infty} d(f_{n+p}(x), f_n(x)) = d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$$
$$\text{i.e. :} \quad d(f, f_n) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$
et donc $f_n \to f$ dans $(\mathcal{F}(X,Y), d)$.

Proposition

Soit (X, τ) un espace topologique et soit (Y, d) un espace métrique.

1. L'espace $\mathcal{C}(X,Y)$ est fermé dans $(\mathcal{F}(X,Y), d)$ muni de la distance de la convergence uniforme.
2. Si de plus Y est complet, alors $(\mathcal{C}(X,Y), d)$ est complet.

Démonstration

1. Soit $(f_n) \in \mathcal{C}(X,Y)$ une suite convergente dans $(\mathcal{F}(X,Y), d)$ et soit f sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 > 0$ t.q. :
$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$
Soit $x_0 \in X$ et soit $n \geq n_0$. Comme f_n est continue en x_0, il existe un voisinage $V \subset X$ de x_0 t.q. :
$$\forall x \in V, \quad d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon.$$
On en déduit : $\forall x \in V$,
$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) < 3\varepsilon,$$
i.e. f est continue en x_0, $\forall x_0 \in X$.
2. Si en outre Y est complet, alors $\mathcal{C}(X,Y)$ est fermé dans $\mathcal{F}(X,Y)$ complet, donc complet.

1.2 Convergence simple

Théorème de Dini

Soit X un espace compact et soit $(f_n) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ une suite monotone qui converge simplement vers f sur X. Alors la convergence vers f est uniforme sur X.

Démonstration

1. Pour fixer les idées, on suppose que la suite (f_n) est croissante vers f. En remplaçant f_n par $f - f_n$, on se ramène au cas où f_n décroît vers 0.
2. Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$X_n = \{x \in X, \quad f_n(x) \geq \varepsilon\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Les fonctions f_n étant continues, X_n est un fermé, $\forall n$. On remarque que :

$$x \in \cap_{n\geq 0} X_n \iff \forall n \geq 0, \quad f_n(x) \geq \varepsilon$$

ce qui contredit que $f_n(x) \to 0$, $\forall x \in X$. On en déduit que $\cap_{n\geq 0} X_n = \emptyset$ dans X compact, donc qu'il existe $n_1 < n_2 < \cdots n_k$ tels que $\cap_{i=1}^{k} X_{n_i} = \emptyset$. La suite (f_n) étant décroissante par hypothèse, il en est de même de (X_n) et alors $\cap_{i=1}^{k} X_{n_i} = X_{n_k} = \emptyset$. On en déduit que $X_n = \emptyset$, $\forall n \geq n_k$, i.e. :

$$\forall x \in X, \quad \forall n \geq n_k, \quad 0 \leq f_n(x) < \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve.

1.3 Théorème d'Ascoli

Proposition

Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si (X, d) est complet et si $\forall \varepsilon > 0$, X peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

Démonstration

1. $\Leftarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que X est complet et peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

   Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X et soit $X = \cup_{i=1}^{N_0} B(x_i^{(0)}, \varepsilon)$ un recouvrement fini de X. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ étant infinie (sinon, le résultat est immédiat), il existe une suite extraite $(x_{\varphi_0(n)}) \in B(x_{i_0}^{(0)}, \varepsilon)$ contenue dans une boule $B(x_{i_0}^{(0)}, \varepsilon)$. De même, soit $X = \cup_{i=1}^{N_1} B(x_i^{(1)}, \varepsilon/2)$ un recouvrement de X et soit $(x_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}) \in B(x_{i_1}^{(1)}, \varepsilon)$ contenue dans une boule $B(x_{i_1}^{(1)}, \varepsilon)$. Par récurrence sur k, on construit des suites extraites

$(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)} \in B(x^{(k)}_{i_k}, \varepsilon/2^k)$. On pose $y_n = x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)}$. Par construction $y_n \in B(x^{(n)}_{i_n}, \varepsilon/2^n)$. Soit $n, p \geq 0$. Alors

$$(y_{n+p}, y_n) \in B(x^{(n)}_{i_n}, \varepsilon/2^n)^2, \quad \forall n, p \geq 0$$

ce qui montre que (y_n) est de Cauchy dans X complet, donc convergente, soit $y_n \to y_*$. On conclut que X est compact.

2. $\Rightarrow$ La réciproque est immédiate.

Corollaire

Dans (X, d) complet, $\bar{A} \subset X$ est compact si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

Théorème d'Ascoli

Soit (X, d) compact, (Y, d) complet. On suppose que la famille $A \subset \mathbb{C}(X, Y)$ est équicontinue et vérifie : $\forall x \in X$, l'ensemble $\overline{\{f(x),\ f \in A\}}$ est compact. Alors $\overline{A}$ est compact.

Démonstration

1. Soit $\varepsilon > 0$. La famille A étant équicontinue sur le compact X, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Soit $X = \cup_{i=1}^{I} B(x_i, \eta)$ un recouvrement fini. Pour tout i, $\overline{\{f(x_i),\ f \in A\}}$ est compact par hypothèse, donc peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon η. Soit donc

$$\cup_{i=1}^{I} \overline{\{f(x_i),\ f \in A\}} \subset \cup_{j=1}^{J} B(y_j, \varepsilon).$$

Soit $f, g \in A$ et soit $x \in X$, par exemple $x \in B(x_i, \eta)$, $f(x_i) \in B(y_j, \varepsilon)$, $g(x_i) \in B(y_k, \varepsilon)$. Alors

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), y_j) + d(y_j, y_k) + d(y_k, g(x_i)) +$$

$$+ d(g(x_i), g(x)) < 4\varepsilon + d(y_j, y_k).$$

Si $j = k = \gamma(i)$, alors $d(f(x), g(x)) \leq 4\varepsilon$. Pour réaliser cela, on introduit l'ensemble Γ des applications $\gamma : \ \{1, \cdots, I\} \to \{1, \cdots, J\}$ et on note

$$A_\gamma = \{f \in A, \quad f(x_i) \in B(y_{\gamma(i)}, \varepsilon), \quad \forall i\}, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Alors $A \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ et le recouvrement est fini. On a : $\forall \gamma \in \Gamma$,

$$\forall f, g \in A_\gamma, \quad d(f,g) \leq 4\varepsilon.$$

i.e. : $A_\gamma \subset B(g_\gamma, 4\varepsilon)$ pour tout choix de $g_\gamma \in A_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Comme Γ est fini et que $A \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, on a obtenu un recouvrement fini de A par des boules ouvertes de 4ε, $\forall \varepsilon > 0$.

2 Construction d'espaces de fonctions

2.1 Espaces hilbertiens à poids

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Dans la suite, on convient d'identifier $L^2(\Omega)$ avec son dual.

L'espace $L^2(\Omega, a)$

Soit $a : \ \Omega \to \mathbb{R}$ un poids sur Ω, i.e. une fonction continue, > 0 sur Ω. Alors la forme bilinéaire définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ par

$$((f,g))_a := \int_\Omega f(x)g(x)a(x)\,dx, \quad \forall (f,g) \in \mathcal{C}_c(\Omega) \tag{1}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$.

Proposition

L'espace

$$L^2(\Omega, a) := \{f : \ \Omega \to \mathbb{R}, \ \int_\Omega |f|^2 a\,dx < +\infty\}$$

est le complété de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_a$ associée au produit scalaire (1). C'est un espace de Hilbert qu'on choisit de ne pas identifier à son dual puisque $L^2(\Omega)$ a été pris comme espace pivot.

Démonstration

Soit $f \in \overline{\mathcal{C}_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_a}$ et soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ t.q. $\|f_n - f\|_a \to 0$. Alors $(f_n - f)\sqrt{a} \to 0$ dans $L^2(\Omega)$. On en déduit que la suite $(f_n\sqrt{a})_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet, donc convergente dans $L^2(\Omega)$. De l'unicité de la limite dans $L^2(\Omega)$, on déduit que $f\sqrt{a} \in L^2(\Omega)$, i.e. $f \in L^2(\Omega, a)$

et l'inclusion $\overline{\mathcal{C}_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_a} \subset L^2(\Omega, a)$ est ainsi montrée. Réciproquement, soit $f \in L^2(\Omega, a)$. Alors $f\sqrt{a} \in L^2(\Omega)$ et comme $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite $(g_n)_n \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ t.q. : $g_n \to f\sqrt{a}$ dans $L^2(\Omega)$, i.e. $\dfrac{g_n}{\sqrt{a}} - f \to 0$ dans $L^2(\Omega, a)$ avec $\dfrac{g_n}{\sqrt{a}} \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.

Proposition

L'application bilinéaire $(f, g) \mapsto (f, g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$ est définie sur $L^2(\Omega, a) \times L^2(\Omega, a^{-1})$ et met en dualité $L^2(\Omega, a)$ et $L^2(\Omega, a^{-1})$, l'opérateur de dualité de $L^2(\Omega, a)$ sur $L^2(\Omega, a^{-1})$ étant l'opérateur de multiplication par a.

Démonstration

Soit $(f, g) \in L^2(\Omega, a) \times L^2(\Omega, a^{-1})$. On a

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\sqrt{a(x)}g(x)\frac{1}{\sqrt{a(x)}}dx$$

donc, l'inégalité de Cauchy-Schwartz entraîne :

$$|(f, g)| \leq \|f\|_a \|g\|_{a^{-1}} < \infty.$$

De plus, $\forall f \in L^2(\Omega, a)$,

$$\|af\|_{a^{-1}}^2 = \int_\Omega |af(x)|^2 \frac{1}{a} dx = \|f\|_a^2 < \infty,$$

i.e. $af \in L^2(\Omega, a^{-1})$. D'autre part, $\forall g \in L^2(\Omega, a)$,

$$|(af, g)| = |(\sqrt{a}f, g\sqrt{a})| \leq \|\sqrt{a}f\|_2 \|g\sqrt{a}\|_2 = \|af\|_{a^{-1}} \|g\|_a$$

i.e. :

$$\frac{|(af, g)|}{\|g\|_a} \leq \|af\|_{a^{-1}}, \quad \forall g \in L^2(\Omega, a).$$

et l'égalité est réalisée pour $g = f$. On en déduit

$$\sup_{g \in L^2(\Omega, a)} \frac{|(af, g)|}{\|g\|_a} = \|af\|_{a^{-1}}$$

De plus : $\forall (f, g) \in L^2(\Omega, a) \times L^2(\Omega, a^{-1})$, $((f, g))_a = (af, g)$ ce qui montre que l'opérateur de multiplication par a est l'opérateur de dualité.

Corollaire

L'opérateur de multiplication par $\sqrt{a}$ est une isométrie de $L^2(\Omega, a)$ sur $L^2(\Omega)$.

Proposition

On suppose qu'il existe $c > 0$ t.q. :

$$a(x) \geq c > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2}$$

Alors $L^2(\Omega, a)$ s'identifie à un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$ et les inclusions :

$$L^2(\Omega, a) \subset L^2(\Omega) \subset L^2(\Omega, a^{-1}).$$

sont des injections continues avec images denses.

Démonstration

Soit $f \in L^2(\Omega, a)$. On a

$$|f| = |\frac{1}{\sqrt{a}} f \sqrt{a}| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \|f\|_a$$

donc l'inclusion $L^2(\Omega, a) \subset L^2(\Omega)$ est continue. Comme de plus l'application $f \mapsto f\sqrt{a}$ est une isométrie de $L^2(\Omega, a)$ sur $L^2(\Omega)$, l'inclusion est injective. La densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ entraîne :

$$\overline{\mathcal{C}_c(\Omega)}^{|\cdot|} \subset \overline{L^2(\Omega, a)}^{|\cdot|} \subset L^2(\Omega)$$

i.e. : $\overline{L^2(\Omega, a)}^{|\cdot|} = L^2(\Omega)$.

Exemple

Pour tout $s > 0$, on définit l'espace $\hat{H}^s(\mathbb{R}^N)$ associé au poids

$$a_s(x) = (1 + \|x\|^2)^s \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Définition

Le produit de convolution $f \star g$ de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ est défini par :

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)dy.$$

Remarque

1. Le produit de convolution de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ est une fonction continue à support compact :

$$\text{supp } (f \star g) \subset \text{supp}(f) + \text{ supp}(g).$$

2. D'après le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^N} g(t) dt.$$

On en déduit, par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

3. On pose : $\forall h \in \mathbb{R}^N$,

$$\tau_h \varphi(x) = \varphi(x+h), \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

On voit immédiatement que :

$$(\tau_h f) \star g = f \star (\tau_h g) = \tau_h (f \star g), \quad \forall f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

Proposition

Soit $\lambda \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ continûment différentiable sur $\mathbb{R}^N$ et soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Alors $f \star \lambda$ est différentiable de différentielle donnée par :

$$D(f \star \lambda) = f \star D\lambda.$$

Démonstration

Soit K le support de λ. On a

$$\frac{1}{\|h\|} \left(\tau_h (f \star \lambda) - f \star \lambda - f \star D\lambda \cdot h \right) = f \star \frac{1}{\|h\|} \left(\tau_h \lambda - \lambda - D\lambda \cdot h \right)$$

avec : $\forall y \in \mathbb{R}^N$,

$$\frac{1}{\|h\|} \left(\tau_h \lambda - \lambda - D\lambda \cdot h \right)(y) = \frac{1}{\|h\|} \int_0^1 \left(D\lambda(y+th) dt - D\lambda(y) \right) dt \cdot h.$$

L'application λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur K, donc $D\lambda$ est uniformément continue sur le compact K. Soit $\varepsilon > 0$ Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$\forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall h \in B(0, \eta), \quad |(D\lambda(y+th)dt - D\lambda(y)) \cdot h| \leq \varepsilon \|h\|.$$

On en déduit :

$$\forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \forall h \in B(0,\eta), \qquad \left| \frac{1}{\|h\|} \left(\tau_h \lambda - \lambda - D\lambda \cdot h\right)(y) \right| \leq \varepsilon$$

donc : $\forall h \in B(0,\eta)$,

$$\left| \frac{1}{\|h\|} \left(\tau_h(f \star \lambda) - f \star \lambda - f \star D\lambda \cdot h\right) \right| \leq \varepsilon \int_K |f(x-y)| dy \leq \varepsilon C_K \|f\|_1$$

Remarque

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et si $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $f \star \rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Théorème

L'application : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \ni (f,g) \mapsto f \star g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^N) \times L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration

De (3), on déduit que l'application bilinéaire $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \ni (f,g) \mapsto f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ est continue lorsque $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ est muni de la norme induite par $L^1(\mathbb{R}^N)$. Le théorème de prolongement par densité valable dans les espaces de Banach permet de conclure.

Corollaire

Le produit de convolution se prolonge de façon unique en une aplication linéaire continue de $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N)$ dans $L^r(\mathbb{R}^N)$ où : $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ grâce à l'inégalité :

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème

Pour tout $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^N)$, l'opérateur de convolution $\lambda\star$: $L^2(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto \lambda \star f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$|\lambda \star f| \leq \|\lambda\|_1 |f|, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration

Soit $\lambda \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda\star f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_{\mathbb{R}^N} \lambda(y) f(x-y) dy\right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(y)||f(x-y)|dy\right)^2 dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{|\lambda(y)|}\sqrt{|\lambda(y)|}|f(x-y)|dy\right)^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(y)|dy \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(y)||f(x-y)|^2 dydx =$$

$$= \|\lambda\|_1 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\lambda(y)||f(x-y)|^2 dydx.$$

La mesure de Lebesgue étant invariante par translation, on en déduit, d'après le théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda \star f|^2 dx \leq \|\lambda\|_1^2 |f|^2.$$

Théorème : approximation par convolution

Soit $\lambda \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ t.q. : $\lambda \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \lambda dx = 1$ et supp $\lambda \subset B(0,1)$ où $B(0,1)$ est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $h \in]0,1[$, on définit λ_h sur R^n en posant :

$$\lambda_h(x) = \frac{1}{h^N}\lambda\left(\frac{x}{h}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors, les opérateurs de convolution $\lambda_h\star$ sont bornés dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et convergent simplement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ vers l'unité. De plus : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$|\lambda_h \star f - f| \leq \omega(f,h) := \sup_{\|y\|\leq h} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad (4)$$

Démonstration

On remarque que pour tout $h \in]0,1[$, la fonction λ_h est continue, ≥ 0, à support compact contenu dans une boule de rayon h et que, par changement de variable :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_h dx = \frac{1}{h^n} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda\left(\frac{x}{h}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_h(y) dy = 1.$$

Du théorème précédent, on déduit que

$$\|\lambda_h \star\| := \sup_{f \in L^2(\mathbb{R}^N)} \frac{|\lambda_h \star f|}{|f|} \leq \|\lambda_h\|_1 = 1.$$

Il reste à montrer (4). Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda_h \star f - f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_h(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_h(y) dy \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_h(y) |f(x-y) - f(x)|^2 dy dx =$$

$$= \|\lambda_h\|_1 \int_{B(0,h)} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_h(y) |f(x-y) - f(x)|^2 dx dy \leq$$

$$\leq \|\lambda_h\|_1 \int_{B(0,h)} \lambda_h(y) \omega(f,h)^2 dy = \|\lambda_h\|_1^2 \omega(f,h)^2 = \omega(f,h)^2.$$

Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{h \to 0} \omega(f,h) = 0$, d'où la conclusion.

Proposition

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{\mathcal{C}_c(\Omega)} = L^2(\Omega)$, il existe $f_0 \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ t.q. $|f - f_0| \leq \varepsilon$. Soit $K \subset \Omega$ le support compact de f_0. Il existe $h_1 > 0$ suffisamment petit t.q. $K + B(0,h) \subset \Omega$, $\forall h \in]0, h_1[$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ définie par :

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1 - \|x\|}\right) & \text{si} \quad \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

On pose : $\rho_h(x) = \dfrac{1}{h^N} \rho\left(\dfrac{x}{h}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\forall h > 0$. Alors, $\rho_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ a son support contenu dans $B(0,h)$. Donc, le support de $\rho_h \star f_0$ est dans $K + B(0,h) \subset \Omega$, $\forall h \in]0, h_1$, et il existe h_2, $0 < h_2 < h_1$, t.q. :

$$|f_0 - \rho_h \star f_0| \leq \omega(f_0, h) \leq \varepsilon.$$

Il en résulte : $\rho_h \star f_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ et

$$|f - \rho_h \star f_0| \leq 2\varepsilon, \quad \forall h < h_2.$$

2.2 Les espaces de Sobolev $H_0^m(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H^{-m}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω et on choisit d'identifier $L^2(\Omega)$ à son dual.

Proposition

Sot $\mathcal{D}$ un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et soit H le complété de $\mathcal{D}$ pour $(\cdot,\cdot)$. Soit $\mathcal{A} = \{A_p\}_{p\in P}$ une famille finie d'opérateurs linéaires de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. On suppose que $\mathcal{A}$ est fermée, i.e. : pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{D}$ qui converge vers 0 dans H et t.q. $(A_p\varphi_n)_n$ converge vers f_p dans H, $\forall p \in P$, on a $f_p = 0$, $\forall p \in P$. Alors , il existe un complété $H_0(\mathcal{A})$ de $\mathcal{D}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ associée au produit scalaire :

$$((\varphi,\psi))_{\mathcal{A}} := (\varphi,\psi) + \sum_{p\in P}(A_p\varphi, A_p\psi),$$

pour lequel l'inclusion $H_0(\mathcal{A}) \subset H$ est injective, d'image dense dans H.

Démonstration

Soit $H_0(\mathcal{A})$ un complété de $\mathcal{D}$ pour le produit scalaire $((\cdot,\cdot))_{\mathcal{A}}$, θ l'injection canonique de $\mathcal{D}$ dans $H_0(\mathcal{A})$, j l'injection canonique de $\mathcal{D}$ dans H. On remarque que j est continue sur $\mathcal{D}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$. Il existe donc une application continue $\hat{j} \in \mathcal{L}(H_0(\mathcal{A}), H)$ à image dense. On veut montrer que $\hat{j}$ est injective. Soit $\varphi \in H_0(\mathcal{A})$ t.q. $\hat{j}(\varphi) = 0$. Par constuction de $H_0(\mathcal{A})$, il existe une suite $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ t.q. : $\theta(\varphi_n) \to \varphi$ dans $H_0(\mathcal{A})$. Donc $(\theta(\varphi_n))_n$ est de Cauchy dans $H_0(\mathcal{A})$ et comme θ est une isométrie, $(\varphi_n)_n$ est ausssi de Cauchy pour $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, i.e., les suites $(\varphi_n)_n$ et $(A_p(\varphi_n))_n$, $p \in P$, sont de Cauchy dans H. Comme H est complet, il existe $f \in H$, $f_p \in H$, $p \in P$, t.q. $\varphi_n \to f$ dans H et $A_p\varphi_n \to f_p$ dans H, $\forall p \in P$. Comme $\hat{j}$ est continue, $\hat{j}\theta(\varphi_n) \to \hat{j}(\varphi)$, i.e. $j(\varphi_n) = \varphi_n \to 0$ dans H. Comme la famille $\mathcal{A}$ est fermée, on en déduit que $f_p = 0$, $\forall p \in P$. Finalement : $\|\varphi_n\|_{\mathcal{A}} \to 0$, i.e. $\theta(\varphi_n) \to 0$ dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$. On en déduit que $\varphi = 0$.

Corollaire

Si $Q \subset P$ et si $\mathcal{B} = \{A_p\}_{p\in Q} \subset \mathcal{A}$, alors $H_0(\mathcal{A}) \subset H_0(\mathcal{B}) \subset H$, les images des injections étant denses.

Proposition

La famille $\mathcal{A}_m$ des opérateurs de dérivation :

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_N^{p_N}}$$

d'ordre $|p| = p_1 + \cdots + p_N \leq m$ est fermée.

Démonstration

Les opérateurs D^p, $0 \leq |p| \leq m$, sont des opérateurs linéaires $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant, d'après la formule d'intégration par parties : :

$$\int_\Omega D^p \varphi \psi dx = (-1)^{|p|} \int_\Omega \varphi D^p \psi dx$$

Soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.q. : $\varphi_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)$. On suppose de plus qu'il existe une famille $(f_p)_{|p|\leq m}$ t.q. :

$$D^p \varphi_n \to f_p \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \quad |p| \leq m.$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega D^p \varphi_n \psi dx = (-1)^{|p|} \int_\Omega \varphi_n D^p \psi dx$$

d'où, en passant à la limite :

$$\int_\Omega f_p \psi dx = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que $f_p = 0$, $|p| \leq m$, i.e. que la famille $\mathcal{A}_m$ est fermée.

Définition

On note $H_0^m(\Omega)$ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour le produit scalaire

$$((\varphi, \psi))_m := \sum_{|p|\leq m} (D^p \varphi, D^p \psi) = \sum_{|p|\leq m} \int_\Omega D^p \varphi D^p \psi \, dx$$

et par $H^{-m}(\Omega)$ son dual. Par construction $H_0^m(\Omega)$, appelé espace de Sobolev d'ordre m, est dense dans $L^2(\Omega)$. On appelle espace de Sobolev d'ordre $-m$ son dual $H^{-m}(\Omega)$.

Remarque

On déduit de ce qui précède les inclusions : $\forall k \leq m$,

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset H_0^k(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega)$. De plus, chaque espace est dense dans le suivant, à l'exception de $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui n'est pas muni de topologie. Les éléments de $H^{-m}(\Omega)$ sont appelés distributions.

Corollaire

Si $|p| \leq m$, l'opérateur de dérivation D^p se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu de $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{|\cdot|}$ dans $L^2(\Omega)$.

Si $f \in L^2(\Omega)$, on définit la distribution $D^p f \in H^{-m}(\Omega)$ en posant :

$$(D^p f, \varphi) = (-1)^{|p|}(f, D^p \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^m(\Omega)$$

Définition

On appelle espace de Sobolev d'ordre m le sous-espace de $L^2(\Omega)$ défini par :

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega),\ D^p f \in L^2(\Omega)\}.$$

2.3 La Transformation de Fourier

Définition

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On appelle transformée de Fourier de φ l'application

$$\xi \mapsto \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi\xi\cdot y}\varphi(y)dy.$$

2. On dit que φ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^N$ si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^k \varphi(x)| < +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

où x^k est le produit : $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_N^{k_N}$, $\forall k = (k_1, \cdots, k_N) \in \mathbb{N}^N$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^N$ ainsi que leurs dérivées.

Proposition

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Sa transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^N$. On a les relations :

$$D^k\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}((-2i\pi x)^k\varphi),$$

$$(2i\pi\xi)^k\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(D^k\varphi).$$

Il en résulte :

$$|2\pi\xi|^{|k|}|\mathcal{F}\varphi(\xi)| \le \|D^k\varphi\|_{L^1}. \tag{5}$$

$$|D^k(\mathcal{F}\varphi)(\xi)| \le \|2\pi x|^{|k|}\|D^k\varphi\|_{L^1}. \tag{6}$$

On conclut en remarquant que ces relations et les estimations associées resent valides pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème d'inversion

La transformation $\overline{\mathcal{F}}$ définie par : $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\overline{\mathcal{F}}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2i\pi\xi\cdot y}\varphi(y)dy$$

est l'inverse de la transformation de Fourier $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On pose

$$g(x) = e^{-\pi\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} g(x)dx = 1$. D'autre part, en posant :

$$\tau_a\varphi(x) = \varphi(x+a), \quad \forall a, x \in \mathbb{R}^N,$$

on obtient les formules :

$$\mathcal{F}(\tau_a\varphi)(\xi) = e^{2i\pi a\cdot\xi}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$$

$$\mathcal{F}(\varphi_h)(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(h\xi), \quad \mathcal{F}(x \mapsto \varphi(hx)) = (\mathcal{F}(\varphi))_h \quad \text{où} \quad \varphi_h(x) = \frac{1}{h^N}\varphi\left(\frac{x}{h}\right), \quad \forall h \in \mathbb{R}^*$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2i\pi\xi\cdot a}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)g(h\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(\tau_a\varphi)(\xi)g(h\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_a\varphi)(\xi)\mathcal{F}(x \mapsto g(hx))(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_a\varphi)(\xi)(\mathcal{F}(g))_h(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_a\varphi)(\xi)g_h(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_a\varphi)(h\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(h\xi + a)g(\xi)d\xi.$$

D'après le théorème de convegence dominée, quand $h \to 0$:

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^N} e^{2i\pi\xi\cdot a}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)d\xi = \varphi(a)\int_{\mathbb{R}^N} g(\xi)d\xi = \varphi(a),$$

i.e. : $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\varphi)(a) = \varphi(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^N$.

Remarque

On montre de même $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$.

Proposition (Parseval-Plancherel)

On munit $L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ du produit hermitien :

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx =: (\varphi, \psi)$$

Soit φ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On a

$$(\varphi, \psi) = (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)$$

et par suite :

$$|\varphi|^2 = |\mathcal{F}\varphi|^2$$

Démonstration

D'après le théorème d'inversion :

$$(\varphi, \psi) = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\psi) = (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi).$$

Théorème

Les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ se prolongent de façon unique en isométries inverses l'une de l'autre de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, il en est de même de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème

Les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ se prolongent de façon unique en des opérateurs linéaires continus de $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$, ensemble des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Démonstration

Des estimations (5)–(6) on déduit que $\mathcal{F}$ est une application continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_{L^1})$ dans l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$ des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^N$, puis, par densité, de $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_1}$ dans $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}^{\mathcal{C}_b}$, i.e. de $L^1(\mathbb{R}^N)$ dans l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Théorème

Les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ se prolongent de façon unique en isométries inverses l'une de l'autre de $H^m(\mathbb{R}^N)$ sur $\hat{H}^m(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration

On remarque que $\hat{H}^m(\mathbb{R}^N)$ est formé des fonctions $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\xi \mapsto \xi^k\psi(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall k = (k_1, \cdots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ avec $|k| := k_1 + \cdots + k_N \leq m$ muni de la norme équivalente

$$\|\psi\|_{\hat{H}^m(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{|k|\leq m} |2\pi\xi^k\psi|^2 \right)^{1/2}.$$

On conclut à l'aide des égalités

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{\hat{H}^m(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

$$\|\overline{\mathcal{F}}(\psi)\|_{\hat{H}^m(\mathbb{R}^N)} = \|\psi\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

3 Résultats de compacité

3.1 Le cas des espaces de Sobolev

Théorème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert régulier borné. Pour tout $m > k \geq 0$, la boule unité fermée de $H^m(\Omega)$ est compacte dans $H^k(\Omega)$.

Démonstration

Soit B_m la boule unité fermée de $H^m(\Omega)$ et soit $(f_n)_n \in B_m$. On commence par admettre l'existence d'un opérateur de prolongement $\pi^0 \in \mathcal{L}(H^m(\Omega), H^m(\mathbb{R}^N))$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ une fonction t.q. $\theta = 1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Les applications $g_n = \theta\pi^0(f_n)$ sont dans une boule $B_m(a) \subset H^m(\mathbb{R}^N)$ de rayon $a > 1$ et leurs supports sont contenus dans le support K de θ.

Soit $m > k \geq 0$ et soit $\varepsilon > 0$. La transformée de Fourier de g_n est définie par :

$$\mathcal{F}g_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi\xi\cdot y} g_n(y)dy$$

et on a la formule :

$$(2i\pi\xi)^k\mathcal{F}(g_n) = \mathcal{F}(D^k g_n).$$

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sur lui-même qui transforme $H^m(\mathbb{R}^N)$ en l'espace à poids $\hat{H}(\mathbb{R}^N)$. Soit $M > 0$. On a : $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$(1+M^2)^{m-k}\int_{\|\xi\|\geq M}(1+\|\xi\|^2)^k|\mathcal{F}(g_n)(\xi)-\mathcal{F}(g_p)(\xi)|^2 d\xi \leq$$

$$\leq \int_{\|\xi\|\geq M}(1+\|\xi\|^2)^m|\mathcal{F}(g_n)(\xi)-\mathcal{F}(g_p)(\xi)|^2 d\xi \leq$$

$$\leq \|y_n - y_p\|^2_{H^m(\mathbb{R}^N)} \leq 2a.$$

On choisit $M > 0$ t.q. : $\dfrac{2a}{(1+M^2)^{k-m}} < \varepsilon$. On en déduit : $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\|\xi\|\geq M}(1+\|\xi\|^2)^k|\mathcal{F}(g_n)(\xi)-\mathcal{F}(g_p)(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{2a}{(1+M^2)^{k-m}} < \varepsilon. \qquad (7)$$

Soit $n \geq 0$ et soit $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\varphi \equiv 1$ sur K. On a :

$$\mathcal{F}(g_n)(\xi) - \mathcal{F}(g_n)(\xi') = \int_K g_n(y)(e^{-2i\pi\xi\cdot y} - e^{-2i\pi\xi'\}\cdot y})dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} g_n(y)\varphi(y)(e^{-2i\pi\xi\cdot y} - e^{-2i\pi\xi'\}\cdot y})dy$$

avec : $\forall y \in K$,

$$|e^{-2i\pi\xi\cdot y} - e^{-2i\pi\xi'\cdot y}| = |1 - e^{-2i\pi(\xi'-\xi)\cdot y}| \leq C\|\xi' - \xi\|.$$

donc :

$$|\mathcal{F}(g_n)(\xi) - \mathcal{F}(g_n)(\xi')| \leq C\|\xi' - \xi\| \int_{\mathbb{R}^N} |g_n(y)||\varphi(y)|dy \leq$$

$$\leq C\|\xi' - \xi\|\|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\xi' - \xi\|.$$

On en déduit que la famille des $\mathcal{F}(g_n)$ est équicontinue sur toute boule de rayon $M > 0$. On a aussi : $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{F}(g_n)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2i\pi\xi\cdot y} g_n(y)\varphi(y)dy$$

donc

$$|\mathcal{F}(g_n)(\xi)| \leq \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq a\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Du théorème d'Ascoli, on déduit que la suite des restrictions à $B(0, M)$ des fonctions $\mathcal{F}(g_n)$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(B(0, M), \mathbb{R})$. Il existe donc une sous-suite $(\mathcal{F}(g_{n_k}))_k$ qui converge uniformément vers une fonction f continue sur $B(0, M)$, i.e. : il existe $n_0 > 0$ t.q. : $\forall k, p \geq n_0$:

$$\sup_{\|\xi\|\leq M} |\mathcal{F}(g_{n_k})(\xi) - \mathcal{F}(g_{n_p})(\xi)|^2 \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\int_{\|\xi\|\leq M} (1 + \|\xi\|^2)^k |\mathcal{F}(g_{n_k})(\xi) - \mathcal{F}(g_{n_p})(\xi)|^2 d\xi \leq C_N(1 + M^2)^k M^N \varepsilon.$$

Compte tenu de (7), il en résulte que $(\mathcal{F}(g_{n_k}))_k$ est de Cauchy dans $\hat{H}^k(\mathbb{R}^N)$, i.e. que $(g_{n_k})_k$ est de Cauchy dans $H^k(\mathbb{R}^N)$, donc convergente dans $H^k(\mathbb{R}^N)$ qui est complet. Par construction, $\|f_n\|_{H^k(\mathbb{R}^N)} \leq \|g_n\|_{H^k(\mathbb{R}^N)}$, donc la suite $(f_{n_k})_k$ est aussi de Cauchy dans $H^k(\mathbb{R}^N)$, donc convergente dans $H^k(\mathbb{R}^N)$.

Bibliographie

[1] Brezis, H. Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[2] Dixmier, J., Topologie Générale, P.U.F., Paris, 1981.

[3] Aubin, J.P., Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.