

## Leçon continuité et dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle. Exemples et applications

Voici ci-dessous une liste de questions et thèmes classiques de difficultés variables que je vous propose de lire / revoir pour aborder avec plus de profit la leçon 228 mercredi 19 septembre. Enrichissez les questions ci-dessous d'un maximum d'exemples et contre-exemples.

- Relire les commentaires du rapport 2017 et 2016 sur la leçon 228.
- Relire si besoin un cours classique sur la continuité et dérivabilité, si vous avez des bases à revoir (l'occasion de vous familiariser avec les ouvrages que vous utiliserez le jour J) : définitions, exemples, TVI, Rolle, TAF, continuité uniforme, équicontinuité, ...
- Trouvez trois livres avec lesquels vous pourriez improviser une bonne leçon sur ce thème.
- Connaissez-vous une fonction continue pas dérivable ? dérivable pas  $C^1$  ?
- L'inverse d'une fonction continue (resp. dérivable) est-elle continue (resp. dérivable) ?
- Le théorème des valeurs intermédiaires est-il équivalent à la continuité ?
- Revoyez les théorèmes de continuité et dérivation sous le signe  $\int$
- Revoyez les résultats de densité classiques des fonctions continues, dérivables, ou lisses dans les espaces  $L^p$ . Déduisez-en une preuve du lemme de Riemann-Lebesgue.
- Quelles sont les propriétés de continuité, dérivabilité d'une fonction de répartition d'une loi de probabilité ?
- Connaissez-vous l'escalier du diable ? Cf exo 2.20 de *exercices de probabilité, Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre, éditions Cassini*
- Les propriétés de régularité passent-elles à la limite ?
- Connaissez-vous le théorème de Stone-Weierstrass ? Le théorème de Bernstein ?
- Connaissez-vous le théorème de Lusin ?
- Connaissez-vous les théorèmes de Dini ?
- Une fonction monotone est-elle dérivable ? Même question avec une fonction convexe ? lipschitzienne ?
- Lire les pages 99-100-101 du rapport d'agreg 2017
- Qu'est-ce qu'une distribution ? Une distribution tempérée ? Si  $f \in L^1([0, 1])$ , pouvez-vous calculer la dérivée au sens des distributions de  $x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$  ?
- Énoncez le théorème d'Ascoli, revoyez sa preuve. Trouvez un résultat utilisant Ascoli.