Leçon Interversions de limites et d'intégrales

Voici ci-dessous une liste de questions et thèmes classiques de difficultés variables que je vous propose de lire / revoir pour aborder avec plus de profit la leçon 235 mercredi 10 octobre. Enrichissez les questions ci-dessous d'un maximum d'exemples et contre-exemples.

- Relire les commentaires du rapport 2017 sur la leçon 235
- Trouvez trois livres avec lesquels vous pourriez improviser une leçon correcte sur ce thème.
- Quel est le lien entre convergence uniforme et interversion de limites ?
- Relire si besoin un cours classique sur l'intégrale de Lebesgue, en particulier les théorèmes de Fatou, convergence monotone, dominée, Fubini-Tonelli, Fubini, ainsi que les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégrale.
- A l'aide du théorème de Fubini et d'un passage en polaires, calculez $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$.
- Revoyez un cours classique sur la transformée de Fourier. Lisez un cours sur la transformée de Laplace.
- Trouvez un exemple de suite tq $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} u_{n,m} \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} u_{n,m}$.
- Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs entières. Comparez $E(X)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X \geq n)$.
- Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire à valeurs réelles. Comparez $E(X)$ et $\int_{\mathbb{R}_+} P(X > t)$.
- Trouvez (par des dessins) des exemples de suites de fonctions (f_n) de la variable réelle, tq $\int \lim f_n \neq \lim \int f_n$. Si possible, explicitez l'exemple par une « formule ».
- Connaissez vous la méthode de la phase stationnaire ?

Exercice 1 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)e^{int} \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.

Exercice 2 (Intégrales de Wallis) Calculer les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$.

Exercice 3 Soit $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\, dx$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, puis un équivalent et un DA à deux termes de u_n.

Exercice 4 (Méthode de Laplace) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et φ une fonction à valeurs réelles définie sur I, de classe C^2 sur I, tq φ' s'annule uniquement en $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$. Soit f une fonction continue définie sur I, à valeurs complexes, tq $f(x_0) \neq 0$ et $\int_I e^{t\varphi(x)}|f(x)|dx < \infty$ pour tout $t > 0$. Montrer que quand $t \to +\infty$, on a

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, f(x_0)\, \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}}\, .$$

Exercice 5 (Théorèmes de densité) Montrer que
$*$ $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$,
$*$ $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$
$*$ $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Exercice 6 (Fonction d'Airy) Etudier la fonction définie par

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx+i\frac{x^3}{3}}\, dx, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}\,.$$

Montrer en particulier qu'elle est C^2 sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est solution de l'équation $u'' - tu = 0$. En déduire qu'elle est C^∞.

Exercice 7 (Prolongement de la fonction Γ d'Euler) Les questions sont rédigées de façon assez indépendante : vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit Γ la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.

1.a. Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que Γ est définie et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re} z > 0\}$.

1.b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

2.a. Soit $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, avec $x > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers une fonction f que l'on identifiera.

2.b. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \qquad \text{pour tout } x > 0\,.$$

3.a. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C(R) > 0$ telle que si $k > R$ et $|z| < R$ alors $\left|\ln(1+\dfrac{z}{k}) - -z\ln(1+\dfrac{1}{k})\right| \leq \dfrac{C(R)}{k^2}$.

3.b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq[R]+1}\left(\ln(1+\frac{z}{k}) - z\ln(1+\frac{1}{k})\right)$ converge normalement sur tout disque $D(0,R)$, $R > 0$.

4. Montrer que la fonction $G : z \mapsto \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}$ est définie et entière.

5. Conclure que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.