Prolongement analytique de la fonction Γ d'Euler et de la fonction ζ de Riemann.
Devoir à préparer pour le 17 octobre 2018

Préambule : Revoyez si nécessaire un cours sur les fonctions holomorphes. Rudin, Real and Complex Analysis, est une référence classique (ch 10 et 15 en particulier).

Voici le programme 2018 de fonctions de la variable complexe.

(a) *Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C 1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.*

(b) *Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.*

(c) *Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.*

(d) *Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.*

(e) *Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.*

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes, mais utilisent toutes les deux le théorème suivant.

Théorème 1 (Prolongement analytique) *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert connexe non vide, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f. Si f n'est pas identiquement nulle sur Ω, alors $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω; en particulier, il est au plus dénombrable.*

Souvent, on l'applique de la manière suivante : soient f et g deux applications holomorphes sur Ω qui coïncident sur un sous-ensemble de Ω ayant un point d'accumulation. Alors elles coïncident partout sur Ω.

Partie I : Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Les questions sont rédigées de façon assez indépendante : vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1.a. Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que Γ est définie et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re} z > 0\}$.
1.b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

2.a. Soit $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, avec $x > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers une fonction f que l'on identifiera.
2.b. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \qquad \text{pour tout } x > 0\,.$$

3.a. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C(R) > 0$ telle que si $k > R$ et $|z| < R$ alors $\left|\ln(1+\frac{z}{k}) - -z\ln(1+\frac{1}{k})\right| \leq \frac{C(R)}{k^2}$.
3.b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq[R]+1} \left(\ln(1+\frac{z}{k}) - z\ln(1+\frac{1}{k})\right)$ converge normalement sur tout disque $D(0,R)$, $R > 0$.

4. Montrer que la fonction $G : z \mapsto \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n! n^z}$ est définie et entière.

5. Conclure que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Prolongement de la fonction ζ de Riemann

Les questions sont rédigées de façon assez indépendante : vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit ζ la fonction définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

Prolongement à $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$

1. Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que ζ est définie et holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} s > 1\}$.

2. On note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{dt}{t^s} - s\int_1^N \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_1^N \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}\,.$$

3. Soit $g(s) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1}\right)$. Montrer que g est définie et holomorphe sur $\{\mathrm{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$. Conclure.

Prolongement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

4. Supposons $\mathrm{Re} s > 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 y}(y^{s/2-1})dy\,.$$

5.a. Soit $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, et $\tilde\theta(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}$. Montrer que θ et $\tilde\theta$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elles se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

5.b. On **admet** que $\theta(\frac{1}{t}) = \sqrt{t}\theta(t)$. (Vous pouvez chercher une démonstration, vous-même, ou dans un livre.) Vérifier que $\tilde\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\tilde\theta(\frac{1}{t}) + 1\right) - \frac{1}{2}$.

6. Montrer (en utilisant 4) que $\tilde\theta(y)y^{s/2-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$.

7.a On note $I_1 = \int_0^1 \tilde\theta(y)y^{s/2-1}dy$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} \tilde\theta(y)y^{s/2-1}dy$. À l'aide de la question 5.b, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} t^{-s/2-1/2}\tilde\theta(t)dt.$$

7.b. En déduire que si $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \int_1^{+\infty} \tilde\theta(y)(y^{-s/2-1/2} + y^{s/2-1})dy\,.$$

8.a. Montrer que (lorsque $s = 1$) $\frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(3/2)} = 1$.

8.b. Montrer qu'on peut écrire $\frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{s-1} + \psi(s)$ où ψ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

9. Montrer que l'intégrale de droite dans la question 7b est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ et holomorphe en $s \in \mathbb{C}$. Conclure.

Pour aller plus loin : conjecture de Riemann sur les zéros de la fonction ζ.