Feuille 1

Exercice 1. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $[0, 1]$.

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que $(x_n)_n$ converge vers x. Montrer à la main que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.
2. On ne suppose plus que $(x_n)_n$ converge. Pourquoi possède-t-elle au moins une valeur d'adhérence ?
3. Montrer que si $(x_n)_n$ possède une seule valeur d'adhérence, notée x, alors $(x_n)_n$ converge vers x.
4. Soit $(\theta_n)_n$ une suite bornée de nombres réels. On suppose que les suites $(e^{i\theta_n})_n$ et $(e^{i\theta_n\sqrt{2}})_n$ convergent vers 1. Montrer que $(\theta_n)_n$ tend vers 0.

Exercice 2. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler les définitions de $\liminf_n x_n$ et de $\limsup_n x_n$.
2. On définit
$$L := \inf_m \frac{1}{m} x_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$
Nous allons montrer que si $x_{m+n} \leq x_m + x_n$, alors la suite $(\frac{1}{n}x_n)_n$ converge vers L. On commence par supposer que $L \in \mathbb{R}$. Exprimer L à l'aide de ϵ.
3. Effectuer une division euclidienne de n et montrer que $\limsup_n x_n \leq \liminf_n x_n$. Conclure.
4. Traiter le cas où $L = -\infty$.
5. Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(||T^n||^{1/n})_n$ converge.

Exercice 3. Soient $a > 0$, $\alpha > 1$ et $f : [0, \delta] \to [0, \delta]$ une fonction continue vérifiant :
$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha) \text{ en } 0.$$

1. Montrer que si $u_0 > 0$ est assez petit, alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est décroissante et tend vers 0.
2. Trouver $\beta < 0$ tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ possède une limite non nulle.
3. Rappeler et démontrer le théorème de Cesàro. Donner un équivalent de la suite u_n.
4. Applications : les fonctions $\sin x$ et $\log(1 + x)$.

Exercice 4. Série harmonique. Soit $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer de manière élémentaire que S_n tend vers l'infini.
2. Montrer que S_n est équivalent à $\ln n$ lorsque n tend vers l'infini.
3. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (la constante d'Euler) telle que $S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.