Université de Rennes 1
Jürgen Angst

Probabilités pour l'agrégation (tronc commun)

Le programme officiel

Voici tout d'abord la liste des notions de théorie des probabilités qui figuraient dans le programme officiel de l'agrégation en 2017/2018 :

Définition d'un espace probabilisé. Événements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire. Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. *Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.*

Convergences de suites de variables aléatoires. Convergence en probabilité, dans $\mathbb{L}^p$, *presque sur̂ement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy. .*

Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

Les leçons explicitement concernées

— 260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire. (Option D)
— 261 - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
— 262 - Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
— 263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
— 264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications. (Option D)

Ce que dit le rapport du jury

Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications [...], par ex. en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon.

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement [...] De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités.

Leçon 218 : Applications des formules de Taylor.
Pour aller plus loin, on peut mentionner des applications en algèbre bilinéaire (lemme de Morse), en géométrie (étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (TCL).

Leçon 234 : Espaces $\mathbb{L}^p$
Par ailleurs, des exemples issus des probabilités peuvent tout à fait être mentionnés.

Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.
Par ailleurs, l'inégalité de Jensen a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Leçon 260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrès, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des $\mathbb{L}^p$). Le candidat peut citer mais doit surtout savoir retrouver rapidement les espérances et variances de lois usuelles, notamment Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de Markov, de Bienaymé-Chebyshev, de Jensen et de Cauchy-Schwarz) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique. Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

Leçon 261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.
Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Le candidat doit être en mesure de calculer la fonction caractéristique des lois usuelles. Les liens entre la fonction caractéristique et la transformée de Fourier sont des attendus du jury. Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy, que les candidats en comprennent la portée, et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite. Pour aller plus loin, des applications pertinentes de ces résultats seront les bienvenues. Enfin, la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

Leçon 262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.
Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. On peut par ailleurs exiger de connaître au moins l'architecture des preuves. L'étude de maximum et minimum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi peut nourrir de nombreux exemples. Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices,...) ou donner des inégalités de grandes déviations. Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

Leçon 263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Certains candidats trouveront utile de mentionner le théorème de Radon-Nikodym, même s'il ne s'agit pas de faire un cours abstrait sur l'absolue continuité. Le lien entre indépendance et produit des densités est un outil important. Le lien entre la somme de variables indépendantes et la convolution de leurs densités est trop souvent oublié. Ce résultat général peut être illustré par des exemples issus des lois usuelles. Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$. Les candidats proposent parfois en développement la caractérisation de la loi exponentielle comme étant l'unique loi absolument continue sans mémoire : c'est une bonne idée de développement de niveau élémentaire pour autant que les hypo-

thèses soient bien posées et toutes les étapes bien justifiées. On pourra pousser ce développement à un niveau supérieur en s'intéressant au minimum ou aux sommes de telles lois. La preuve du théorème de Scheffé sur la convergence en loi peut faire l'objet d'une partie d'un développement. La loi de Cauchy offre encore des idées de développements intéressants (par exemple en la reliant au quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée). Pour aller plus loin, les candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite. On peut aussi proposer en développement le théorème de Cochran.

Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de Bernoulli, binomiale et de Poisson doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de Bernoulli. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice. Pour aller plus loin, le processus de Galton-Watson peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates. Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de Markov à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

Les leçons où l'on peut/doit parler de probabilités

— 104 Groupes finis. Exemples et applications.
— 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
Chaînes de Markov, marche aléatoire sur un groupe fini. Dérangements.
— 106 Groupe linéaire d'un e.v de dim. finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
Vecteurs gaussiens.
— 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
Marche aléatoire avec une mesure chargeant les générateurs, graphe de Cayley.
— 121 Nombres premiers. Applications.
Crible de Hawkins, théorème des nombres premiers associé.
— 123 Corps finis. Applications.
Théorème de Kakeya sur les corps finis.
— 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Ex. et applications.
— 144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Ex. et applications.
Zéros de polynômes aléatoires, spectre matrice aléatoire, théorème de Wigner.
— 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
Marche aléatoire sur des ensembles de matrices.
— 151 Dim d'un espace vectoriel (dimension finie). Rang. Exemples et applications.
Espérance conditionnelle gaussienne.
— 152 - Déterminant. Exemples et applications.
Vecteurs gaussiens. Proc. déterminantaux, matrices aléatoires, théorème de Wigner.
— 153 Polynômes d'endo. en dim. finie. Réduction d'un endo. en dim. finie. Applications.
— 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
Réduction des matrices stochastiques, Perron-Frobenius et conséquences en proba.
— 156 - Exponentielle de matrices. Applications.
Chaînes de Markov, mesure invariante, Perron–Frobenius, Algorithme PageRank etc.
— 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Matrices de covariance, vecteurs gaussiens, matrices aléatoires, théorème de Wigner
— 162 Systèmes d'éq. lin. ; op. élém., aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
Chaînes de Markov, probabilités et temps moyen d'absorption.
— 170 Formes quad. sur un e.v. de dim. finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
— 171 Formes quad. réelles. Coniques. Exemples et applications.
Matrices de covariance, théorème de Bochner.
— 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
Espérance, permutations comme points extrémaux des matrices stochastiques.
— 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
Toutes les probabilités discrètes !
— 202 Exemples de parties denses et applications.
Construction espérance conditionnelle, Lemme de Doob.
— 203 Utilisation de la notion de compacité.
Critère de tension pour les mesures de proba.
— 207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
Prolongement de mesure, classe monotone.
— 209 Approximation d'une fonction par des poly. et des poly. trigo. Ex et applications.
Théo. de Bernstein (+version trigo). Zéros des polynômes trigo. aléatoires.
— 213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
Construction de l'espérance cond. $\mathbb{L}^2$*, du mouvement brownien avec la base de Haar.*
— 219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Ex. et applications.
Maximum de vraisemblance.
— 221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équa. diff. linéaires. Ex. et appli.
Caractérisation de la gaussienne par la méthode Stein, preuve TCL.
— 223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
— 224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
— 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence.
Chaînes de Markov, martingales, preuve du TCL.
— 228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Ex. et appli.
Mouvement brownien, régularité des fonctions caractéristiques.
— 229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
Jensen, Preuve du lemme de Borel–Cantelli.
— 230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes [...].
Théorème des trois séries.
— 234 Espaces $\mathbb{L}^p$
Cf plus haut.
— 236 Illustrer par des ex. quelques méth. de calcul d'int. de fonctions d'une ou plusieurs var.
Méthode de Monte-Carlo, méthode de rejet.
— 239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Ex et applications.
Lois Gamma, Beta, gaussiennes, fonction caractéristique de la gaussienne par dérivation.
— 243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
Lois caractérisées par leurs moments, séries entières aléatoires.
— 250 Transformation de Fourier. Applications.
Fonctions caractéristiques. TLC.
— 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.
Perron–Frobenius via pt fixe de Brouwer, Jensen, inégalités de concentration (Hoeffding).
— 260, 261, 262, 263, 264.