Corrigé du Problème d'Analyse 2017

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

13 septembre 2019

Partie I (22,5 pts)

1. (2pts) En dimension finie d, la boule unité fermée est un compact de $\mathbb{R}^d$. La borne supérieure $|||\cdot|||_2$ est donc bien définie et atteinte.
   Soit $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

   $$|||A|||_2 = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \|Ax\|_2 = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}^d,\ Ax = 0, \iff A = 0$$

   Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

   $$|||\lambda A|||_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

   car $\|\cdot\|_2$ est une norme qur $\mathbb{R}^d$,

   $$\frac{\|(A+B)x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|(A+B)x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} + \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} \leq |||A|||_2 + |||B|||_2$$

   donc $|||A+B|||_2 \leq |||A|||_2 + |||B|||_2$ par définition de la borne supérieure comme plus petit majorant.
2. (a) (1pt)La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$, i.e. il existe $Q \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ orthogonale et D diagonale telle que $A = QDQ^T$. La matrice Q étant

orthogonale, Q et Q^T conservent la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$, i.e. :

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|QDQ^Tx\|_2}{\|x\|_2}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|DQ^Tx\|_2}{\|Q^Tx\|_2}=\sup_{y\neq 0}\frac{\|Dy\|_2}{\|y\|_2}=|||D|||_2$$

car $x\mapsto Q^Tx$ est une bijection de $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$. Finalement : On conclut en remarquant que la diagonale de D est formée des valeurs propres de A.

(b) (1pt) Par définition de la trace :

$$|\mathrm{Tr}(A)|=|\sum_{\lambda\in\mathcal{V}}\lambda|\leq\sum_{\lambda\in\mathcal{V}}|\lambda|\leq d\max_{\lambda\in\mathcal{V}}|\lambda|=d|||A|||_2.$$

3. (a) (1pt) Soit $A,B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On a, en utilisant successivement les définitions de $|||A|||$ et $|||B|||$ $\forall x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$,

$$\|ABx\|=\|A(Bx)\|\leq|||A|||\|Bx\|\leq|||A|||\,|||B|||\|x\|$$

donc

$$\frac{\|ABx\|}{\|x\|}\leq|||A|||\,|||B|||$$

et on conclut en utilisant la définition de la borne supérieure comme plus petit majorant.

(b) (1pt) On a

$$\sum_{k\geq 0}\left|\left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right|\right|\leq\sum_{k\geq 0}\frac{|||A|||^k}{k!}=e^{|||A|||}<+\infty$$

d'après a). On en déduit que la série de terme général $\frac{A^k}{k!}$ est normalement convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ donc convergente.

(c) (1pt) Soit $A,B\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec $AB=BA$. Soit $N>0$.

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(A+B)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{p=0}^{k}\frac{C_k^p}{k!}A^pB^{k-p}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{p=0}^{k}\frac{A^p}{p!}\frac{B^{k-p}}{(k-p)!}.$$

On reconnaît le terme général de la série produit des séries convergentes e^A et e^B.

4. (a) (0.5+0.5+2+2.5=5,5pts) Les matrices I et J étant diagonales, on a

$$e^I = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = eI, \quad e^J = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

On remarque que $K^2 = I$. De plus, $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, e^A étant la somme d'une série normalement convergente, les séries paire et impaire $\sum \frac{A^{2k}}{(2k)!}$ et $\sum \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sont également normalement convergentes, donc

$$e^K = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k)!} I + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} K = \cosh(1) I + \sinh(1) K =$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$$

De la relation $L^2 = I + L$, on déduit que

$$L^k = a_k I + b_k L$$

avec les relations de récurrence :

$$a_{k+1} = b_k, \quad b_{k+1} = a_k + b_k = b_{k-1} + b_k.$$

avec $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Des propriétés des suites récurrentes, on déduit :

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^k - r_-^k)$$

où $r_\pm$ sont les racines de $r^2 - r - 1 = 0$, i.e. :

$$r_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

On en déduit :

$$L^k = \frac{r_+^{k-1}}{\sqrt{5}}(I + r_+ L) - \frac{r_-^{k-1}}{\sqrt{5}}(I + r_- L) = -\frac{r_+^k}{\sqrt{5}}(r_- I - L) + \frac{r_-^k}{\sqrt{5}}(r_+ I + L)$$

puis :

$$e^L = -\frac{e^{r_+}}{\sqrt{5}}(r_- I - L) + \frac{e^{r_-}}{\sqrt{5}}(r_+ I + L).$$

(b) (1pt) Le calcul donne directement :

$$M^2 = I + \sin\theta\cos\theta(JK + KJ)$$

avec $JK = -KJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) (1.5+1=2,5pts) La matrice e^{-sM} est la somme d'une série normalement convergente donc peut aussi s'écrire comme la somme de ses séries paire et impaire normalement convergentes, ce qui donne, compte tenu de $M^2 = I$:

$$e^{-sM} = \sum_{k\geq 0} \frac{s^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k\geq 0} \frac{(-s)^{2k+1}}{(2k+1)!} M =$$

$$= \cosh(-s)I + \sinh(-s)M = \cosh(s)I - \sinh(s)M$$

car cosh et sinh sont paire et impaire resp.

Par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}(e^{-sM}) = \cosh(s)\mathrm{Tr}(I) - \sinh(s)\mathrm{Tr}(M) = 2\cosh(s)$$

car $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

Dans la suite on note $|||\cdot||| := |||\cdot|||_2$ et $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$.

5. (a) (2+1=3pts) On a : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|||\frac{t^k}{k!}A^k||| \leq \frac{|t|^k}{k!}|||A|||^k$$

et

$$\sum_{k\geq 0} \frac{|t|^k}{k!}|||A|||^k = e^{|t||||A|||} < +\infty$$

donc le critère de Cauchy s'applique à la série majorante entière de rayon de convergence infini sur $\mathbb{R}^d$.

La fonction $t \mapsto \phi_x(t)$ étant la somme d'une série entière de rayon de convergnece infini, on peut dériver terme à terme, ce qui entraîne $\phi'_x(t) = -A\phi_x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et on a directement : $\phi_x(0) = x$, ce qui montre que ϕ_x est solution de $y'(t) + Ay(t) = 0$, $y(0) = x$.

L'application $y \mapsto -Ay$ est Lipschitzienne de constante $|||A|||$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation différentielle $y'(t) = -Ay(t)$, $y(0) = x$, admet une unique solution pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé.

(b) (2pts) $\Rightarrow$ Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ positive et soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a

$$(\|\phi_x\|^2)' = 2\phi_x' \cdot \phi_x = -2A\phi_x \cdot \phi_x \leq 0$$

Donc $t \mapsto \|\phi_x\|^2$ est décroissante et

$$\|\phi_x(t)\|^2 \leq \|\phi_x(0)\|^2 = \|x\|, \quad \forall t \geq 0.$$

donc $|||e^{-tA}||| \leq 1$ par définition de la norme matricielle.
$\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que $|||e^{-tA}||| \leq 1$, $\forall t \geq 0$. Alors

$$\forall t \geq 0, \quad \forall h \geq 0, \quad \|\phi_x(t+h)\| \leq |||e^{-hA}|||\|\phi_x(t)\| < \|\phi_x(t)\|$$

et $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \|\phi_x(t)\|$ est décroissante. On a :

$$(\|\phi_x(t)\|^2)' = 2\phi_x'(t) \cdot \phi_x(t) = -2A\phi_x(t) \cdot \phi_x(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En particulier, si $t = 0$:

$$x \cdot Ax = A\phi_x(0) \cdot \phi_x(0) \geq 0$$

et A est donc positive.

(c) (1,5pts) Soit $s \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \phi_x(t+s)$ est l'unique solution de $y' + Ay = 0$, $y(0) = \phi_x(s)$, donc $\phi_x(t+s) = e^{-tA}\phi_x(s)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, i.e. $e^{-(t+s)A} = e^{-tA}e^{-sA}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Partie II (9 pts)

1. (3pts) On remarque que $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$,

$$|||e^A||| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{|||A|||^k}{k!} = e^{|||A|||} < +\infty$$

donc

$$|||S_{n,t}||| \leq e^{|t||||A+B|||/n}$$

avec $\forall t \in [0,1]$,

$$\frac{|t|}{n}|||A+B||| \leq \frac{1}{n}(|||A||| + |||B|||)$$

donc, la fonction $t \mapsto e^t$ étant croissante :

$$|||S_{n,t}||| \leq e^{(|||A|||+|||B|||)/n}.$$

D'autre part :

$$|||T_{n,t}||| \leq |||e^{-tA/n}||| \, |||e^{-tB/n}|||$$

d'après I-3-a), donc

$$|||T_{n,t}||| \leq e^{|||A|||/n} e^{|||B|||/n} = e^{(|||A|||+|||B|||)/n}$$

2. (a) (1,5pts) On a

$$\sum_{m=0}^{n-1} (S_{n,t})^m (S_{n,t} - T_{n,t})(T_{n,t})^{n-1-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} (S_{n,t})^{m+1} (T_{n,t})^{n-1-m} - \sum_{m=0}^{n-1} (S_{n,t})^m (T_{n,t})^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (S_{n,t})^m (T_{n,t})^{n-m} - \sum_{m=0}^{n-1} (S_{n,t})^m (T_{n,t})^{n-m} = (S_{n,t})^n - (T_{n,t})^n$$

(b) (1pt) On en déduit que

$$|||(S_{n,t})^n - (T_{n,t})^n||| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |||S_{n,t}|||^m |||S_{n,t} - T_{n,t}||| \, |||T_{n,t}|||^{n-1-m} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n-1} e^{m(|||A|||+|||B|||)/n} |||S_{n,t} - T_{n,t}||| e^{(n-1-m)(|||A|||+|||B|||)/n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} e^{(n-1)(|||A|||+|||B|||)/n} |||S_{n,t} - T_{n,t}||| \leq n e^{(|||A|||+|||B|||)} |||S_{n,t} - T_{n,t}|||$$

3. (1,5pts) On a

$$S_{n,t} - T_{n,t} = \frac{t^2}{2n^2}(BA - AB) + \sum_{k \geq 3} \frac{t^k}{k! n^k}(A+B)^k - \sum_{k \geq 3} \frac{t^k}{n^k} \sum_{p=0}^{k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{k-p}}{(k-p)!} =$$

$$= \sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{k!n^k}(A+B)^k - \sum_{k\geq 2} \frac{t^k}{n^k} \sum_{p=0}^{k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{k-p}}{(k-p)!}$$

donc : $\forall t \in [0,1]$,

$$|||S_{n,t} - T_{n,t}||| \leq \frac{1}{n^2}(e^{|t||||A+B|||} + e^{|t||||A|||}e^{|t||||B|||}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}(e^{|||A+B|||} + e^{|||A|||}e^{|||B|||}) = \frac{C_0(A,B)}{n^2}$$

4. (1pt) D'après 2) et 3) :

$$|||(S_{n,t})^n - (T_{n,t})^n||| \leq ne^{|||A|||+|||B|||}|||S_{n,t} - T_{n,t}||| \leq ne^{(|||A|||+|||B|||)}\frac{C_0(A,B)}{n^2} =: \frac{C_{A,B}}{n}.$$

5. (1pt) On a

$$e^{-tA/(2n)}e^{-tB/n}e^{-tA/(2n)} - e^{-t(A+B)/n} =$$

$$= \sum_{k\geq 3} \frac{t^k}{n^k} \sum_{p+r=0}^{k} \frac{A^p}{2^p p!} \frac{B^r}{r!} \frac{A^{k-p-r}}{2^{k-p-r}(k-p-r)!} - \sum_{k\geq 3} \frac{t^k}{k!n^k}(A+B)^k$$

donc : $\forall t \in [0,1]$,

$$|||e^{-tA/(2n)}e^{-tB/n}e^{-tA/(2n)} - e^{-t(A+B)/n}||| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^3}(e^{|t||||A|||/2}e^{|t||||B|||}e^{|t||||A|||/2} + e^{|t||||A+B|||}) =$$

$$= \frac{1}{n^3}(e^{|t||||A|||}e^{|t||||B|||} + e^{|t||||A+B|||}) \leq \frac{1}{n^3}(e^{|||A|||}e^{|||B|||} + e^{|||A+B|||}) =: \frac{C_1(A,B)}{n^3}$$

Le même raisonnement que pour 4) entraîne :

$$|||(e^{-tA/(2n)}e^{-tB/n}e^{-tA/(2n)})^n - e^{-t(A+B)}||| \leq ne^{(|||A|||+|||B|||)}\frac{C_1(A,B)}{n^3} =: \frac{C'_{A,B}}{n^2}.$$

Partie III (27 pts)

1. (a) (2pts) La linéarité de U_t, $\forall t \geq 0$, est immédiate.
   On a : $\forall t, s \geq 0$,

$$U_t U_s = e^{-tA}e^{-sA} = e^{-(t+s)A} = U_{t+s}$$

d'après I-3-c) avec $A = B$, donc (i) est vérifié, $U_0 = e^0 = I$ par définition de l'exponentielle, i.e. (ii) est vérifié. Pour (iii), on applique I.5.a) avec $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$ à $t \mapsto U_t(x) = \phi_x(t)$. Donc U est un semi-groupe. La matrice A étant positive par hypothèse, on déduit de I.5.b) que $U_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $\forall t \geq 0$, et que U est un semi-groupe borné.

(b) (1pt) D'après I.5.a), ϕ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par définition de la dérivée :

$$\phi_x'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_x(t) - x}{t} = -A\phi_x(0) = -Ax.$$

On en déduit que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{U_t(x) - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\phi_x(t) - x}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_x(t) - x}{t} = -Ax.$$

2. (a) (1,5pts) Soit $s \geq 0$ et soit $t > 0$. On a : $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$,

$$\frac{1}{t}(\mathcal{U}_t\mathcal{U}_s x - \mathcal{U}_s x) = \frac{1}{t}(\mathcal{U}_{t+s} x - \mathcal{U}_s x) = \mathcal{U}_s \left(\frac{1}{t}(\mathcal{U}_t x - x) \right)$$

avec

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(\mathcal{U}_t x - x) = -\mathcal{A}x$$

par définition de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. La continuité de $\mathcal{U}_s \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ entraîne :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(\mathcal{U}_t\mathcal{U}_s x - \mathcal{U}_s x) = -\mathcal{U}_s\mathcal{A}x$$

et $\mathcal{U}_s x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

(b) (1pt) De ce qui précède, on déduit : $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A}\mathcal{U}_s x = - \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(\mathcal{U}_t\mathcal{U}_s x - \mathcal{U}_s x) = \mathcal{U}_s\mathcal{A}x.$$

3. (a) (3,5pts) Soit $t \geq 0$. La linéarité de $\mathcal{W}_t$ est immédiate. De plus :

$$|e^{-tn^2} u_n|^2 \leq |u_n|^2, \quad \forall n \geq 0$$

donc

$$\|\mathcal{W}_t u\| \leq \|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

On en déduit que $|||\mathcal{W}_t||| \leq 1$ et que $\mathcal{W}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.
Soit $t, s \geq 0$ et soit $u \in \mathcal{H}$. On a :

$$e^{-tn^2} e^{-sn^2} u_n = e^{-(t+s)n^2} u_n, \quad \forall n \geq 0$$

donc $\mathcal{W}_t \mathcal{W}_s = \mathcal{W}_{t+s}$. De plus $\mathcal{W}_0 = Id$ de façon immédiate. Donc (i) et (ii) sont vrais.
Soit $t_0 \geq 0$ et soit $t > 0$. On a : $\forall u \in \mathcal{H}$,

$$\|\mathcal{W}_t u - \mathcal{W}_{t_0} u\|^2 = \sum_{n \geq 0} (e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 |u_n|^2$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que

$$\sum_{n \geq N} |u_n|^2 < \varepsilon.$$

Alors

$$\|\mathcal{W}_t u - \mathcal{W}_{t_0} u\|^2 \leq \sum_{n=0}^{N} (e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 |u_n|^2 + \sum_{n > N} (e^{-tn^2} + e^{-t_0 n^2})^2 |u_n|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} (e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 |u_n|^2 + 4 \sum_{n > N} |u_n|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} (e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 |u_n|^2 + 4\varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \to t_0} \sum_{n=0}^{N} (e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 |u_n|^2 = 0.$$

On en déduit que :

$$\limsup_{t \to t_0} \|\mathcal{W}_t u - \mathcal{W}_{t_0} u\|^2 \leq \varepsilon.$$

Ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc

$$\lim_{t \to t_0} \|\mathcal{W}_t u - \mathcal{W}_{t_0} u\|^2 = 0$$

et (iii) est vrai.

(b) (3pts) La continuité de θ sur $\mathbb{R}_*^+$ est immédiate. D'après la formule de Taylor avec reste intégral : $\forall x > 0$,

$$0 < \theta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (x-t)e^{-t}dt \leq \frac{x}{2}$$

donc $\lim_{x\to 0}\theta(x) = 0 = \theta(0)$, i.e. θ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus : $\forall x > 0$,

$$\theta(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

donc $\lim_{x\to+\infty}\theta(x) = 1$. Il existe $R > 0$ tel que

$$0 < \theta(x) \leq 2, \quad \forall x \geq R.$$

Comme θ est continue sur le compact $[0, R]$, elle y est bornée : soit $|\theta(x)| \leq C'_R$, $\forall x \in [0, R]$. Finalement,

$$|\theta(x)| \leq 2 + C'_R =: C_R, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

i.e. θ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(c) (2,5pts) Soit $u \in \mathcal{H}$. On a : $\forall t > 0$,

$$\frac{1}{t}((\mathcal{W}_t u)_n - u_n) = \frac{e^{-tn^2} - 1}{t}u_n = (\theta(tn^2) - 1)n^2 u_n.$$

et donc

$$\frac{1}{t}((\mathcal{W}_t u)_n - u_n) + n^2 u_n = \theta(tn^2)n^2 u_n.$$

$\Rightarrow$ On pose :

$$\mathcal{V} := \{u \in \mathcal{H},\ \sum_{n\geq 0} n^4|u_n|^2 < +\infty\}.$$

Soit alors $u \in \mathcal{V}$. Soit alors $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que $\sum_{n\geq N} n^4|u_n|^2 < \varepsilon$. On a :

$$\sum_{n\geq 0}|\theta(tn^2)|^2 n^4|u_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{N}|\theta(tn^2)|^2 n^4|u_n|^2 + \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=0}^{N}|\theta(tn^2)|^2 n^4|u_n|^2 = \theta(0)\sum_{n=0}^{N} n^4|u_n|^2 = 0$$

donc

$$\limsup_{t\to 0^+} \sum_{n\geq 0} |\theta(tn^2)|^2 n^4 |u_n|^2 \leq \varepsilon.$$

Ceci est vrai $\forall\varepsilon > 0$, donc

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{n\geq 0} |\theta(tn^2)|^2 n^4 |u_n|^2 = 0.$$

On note $\mathcal{A}u$ la série de terme général $n^2 u_n$. Par définition de $\mathcal{V}$, elle converge dans $\mathcal{H}$ et on en déduit que

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}(\mathcal{W}_t u - u) + \mathcal{A}u \right\| = 0$$

ce qui montre que le semi-groupe $\mathcal{W}$ admet $\mathcal{A}$ comme générateur et que $\mathcal{V} \subset D(\mathcal{A})$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, le calcul précédent montre que si la quantité $\frac{1}{t}(\mathcal{W}_t u - u)$ converge dans $\mathcal{H}$ quand $t \to 0^+$, la limite est donnée par $\mathcal{A}u$ par unicité de la limite dans $\mathcal{H}$, la limite $\mathcal{A}u$ étant la série de terme général $n^2 u_n$. De plus, par définition de $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{H},\ \mathcal{A}u \in \mathcal{H}\}$$

i.e. : $\mathcal{V} = D(\mathcal{A})$.

4. (a) (1,5pts) La linéarité de $\mathcal{U}_t$, $t \geq 0$, découle de la linéarité de l'intégrale. Si $f \in \mathcal{H}$, alors $\|\mathcal{U}_t f\|^2 = \|f\|^2 < +\infty$ après changement de variable $y = x + t$, car la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par translation, donc $\mathcal{U}_t$ est continu et $\mathcal{U}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

   (b) (1pt) Soit $t_0 \geq 0$. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et soit $R > 0$ tel que $\phi(x) = 0$, $\forall |x| \geq R$. Soit alors $|x + t_0| \geq 2R$ et soit $|t - t_0| \leq R$. Alors $|x + t| \geq |x + t_0| - |t - t_0| \geq R$ donc

$$\|\mathcal{U}_t\phi - \mathcal{U}_{t_0}\phi\|^2 = \int_{-2R}^{2R} |\phi(x+t) - \phi(x+t_0)|^2 dx.$$

L'application ϕ est continue sur le compact $[-2R, 2R]$ donc uniformément continue sur $[-2R, 2R]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [-2R, 2R], \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon.$$

Soit $|t-t_0|<\eta$, $t>0$. Alors

$$\|\mathcal{U}_t\phi-\mathcal{U}_{t_0}\phi\|^2\leq 4R\varepsilon^2.$$

Ceci étant vrai $\forall\varepsilon>0$, on en déduit que

$$\lim_{t\to t_0}\|\mathcal{U}_t\phi-\mathcal{U}_{t_0}\phi\|^2=0$$

i.e., $t\mapsto\mathcal{U}_t\phi$ est continue en t_0, $\forall t_0\in\mathbb{R}^+$, i.e. que $t\mapsto\mathcal{U}_t\phi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) (1,5pts) On a $\forall t,s\geq 0$, $\forall f\in\mathcal{H}$,

$$\mathcal{U}_t\mathcal{U}_sf(x)=\mathcal{U}_tf(x+s)=f(x+t+s)=\mathcal{U}_{t+s}f(x)\quad\text{p.p. dans}\quad\mathbb{R}$$

donc (i) est vrai. Par définition de $\mathcal{U}_t$, $\mathcal{U}_0=id$, i.e. (ii).
De b), on déduit que (iii) est vrai si $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Dans le cas général, on utilise la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$. En effet, soit $\varepsilon>0$ et soit $\phi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ t.q. : $\|f-\phi\|<\varepsilon$. Soit $t>0$ et soit $t_0\geq 0$. On a

$$\|\mathcal{U}_tf-\mathcal{U}_{t_0}f\|\leq\|\mathcal{U}_tf-\mathcal{U}_t\phi\|+\|\mathcal{U}_t\phi-\mathcal{U}_{t_0}\phi\|+\|\mathcal{U}_{t_0}\phi-\mathcal{U}_{t_0}f\|=$$

$$=2\|f-\phi\|+\|\mathcal{U}_t\phi-\mathcal{U}_{t_0}\phi\|\leq 2\varepsilon+\|\mathcal{U}_t\phi-\mathcal{U}_{t_0}\phi\|.$$

Soit $\eta>0$ asssocié à ϕ comme dans b) et soit $t>0$ t.q. $|t-t_0|<\eta$. Alors $\|\mathcal{U}_t\phi-\mathcal{U}_{t_0}\phi\|<\eta$ et on en déduit :

$$\|\mathcal{U}_tf-\mathcal{U}_{t_0}f\|\leq 3\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall\varepsilon>0$, on en déduit que la propriété de b) s'étend à tout $f\in\mathcal{H}$. Finalement, $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe sur $\mathcal{H}$.

(d) (1,5pts) Soit $f\in\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ et soit $R>0$ tel que $f(x)=0$, $\forall|x|\geq R$. Soit $0<t<R$. On a, d'après la formule de Taylor-Lagrange :

$$\left\|\frac{\mathcal{U}_tf-f}{t}-f'\right\|^2=\int_{-2R}^{2R}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-f'(x)\right|^2=$$

$$=\int_{-2R}^{2R}\left|\frac{1}{t}\int_x^{x+t}f'(y)dy-f'(x)\right|^2=\frac{1}{t^2}\int_{-2R}^{2R}\left|\int_x^{x+t}(f'(y)dy-f'(x))\right|^2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La dérivée f' étant uniformément continue sur le compact $[x, x+t]$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < \eta < R$ et

$$\forall x, y \in [-2R, 2R], \quad |x-y| < \eta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon.$$

Soit $0 < t < \eta < R$. On a : $\forall x \in [-2R, 2R]$, $\forall y \in [x, x+t]$,

$$\left| \int_x^{x+t} (f'(y)dy - f'(x)) \right| \leq t\varepsilon$$

et donc : $\forall 0 < t < \eta$,

$$\left\| \frac{\mathcal{U}_t f - f}{t} - f' \right\|^2 \leq 4R\varepsilon^2.$$

Ceci éant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\lim_{t \to 0^+} \left\| \frac{\mathcal{U}_t f - f}{t} - f' \right\| = 0$$

i.e. $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}f = -f'$.

5. (a) (1pt) Le calcul direct donne

$$\mathcal{V}_t f(x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ f\left(\dfrac{x}{2} - t\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2t \\ f(x-2t) & \text{si} \quad x \geq 2t \end{cases}$$

On en déduit :

$$\|\mathcal{V}_t f\|^2 = \int_{-\infty}^{-t} |f(y)|^2 dy + 2 \int_{-t}^{0} |f(y)|^2 dy + \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy \leq 4\|f\|^2$$

i.e. $\|\mathcal{V}_t f\| \leq 2\|f\|$.

(b) (2pts) Soit $t, s \geq 0$ et soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par définition de $\mathcal{V}_t$:

$$\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s f(x) = \mathcal{V}_s f(\psi(\psi^{-1}(x) - t)).$$

On pose $y = \psi^{-1}(x) - t$. Alors :

$$\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s f(x) = f(\psi(y-s)) = f(\psi(\psi^{-1}(x) - t - s)) = \mathcal{V}_{t+s} f(x).$$

Dans le cas général où $f \in \mathcal{H}$ on conclut par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$. En effet, soit $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ t.q. $\|\phi - f\| < \varepsilon$. Alors, d'après a) :

$$\|\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s f - \mathcal{V}_{t+s} f\| \leq \|\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s f - \mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s \phi\| + \|\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s \phi - \mathcal{V}_{t+s}\phi\| +$$

$$+ \|\mathcal{V}_{t+s}\phi - \mathcal{V}_{t+s} f\| \leq 8\|f - \phi\| \leq 8\varepsilon$$

car $\|\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s \phi - \mathcal{V}_{t+s}\phi\| = 0$ d'après ce qui précède. Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que $\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s f = \mathcal{V}_{t+s} f$, $\forall f \in \mathcal{H}$. Donc $\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s = \mathcal{V}_{t+s}$.

Il reste à vérifier (iii). Soit $t > 0$ et soit $t_0 \geq 0$. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{V}_t f(x) = f \circ \psi(\psi^{-1} - t)$$

et $f \circ \psi$ est continue à support compact K dans $\mathbb{R}^d$, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ t.q. :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|x - y\| < \eta \Rightarrow |f \circ \psi(x) - f \circ \psi(y)| < \varepsilon.$$

On suppose $|t - t_0| < \eta$. Alors :

$$\|(\psi^{-1}(x) - t) - (\psi^{-1}(x) - t_0)\| < \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et donc

$$\|\mathcal{V}_t f - \mathcal{V}_{t_0} f\| < \varepsilon\sqrt{|K|}.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que $t \mapsto \mathcal{V}_t f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Dans le cas général où $f \in \mathcal{H}$ on conclut par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H}$. En effet, soit $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ t.q. $\|\phi - f\| < \varepsilon$. Alors, d'après a) :

$$\|\mathcal{V}_t f - \mathcal{V}_{t_0} f\| \leq \|\mathcal{V}_t f - \mathcal{V}_t \phi\| + \|\mathcal{V}_t \phi - \mathcal{V}_{t_0}\phi\| + \|\mathcal{V}_{t_0}\phi - \mathcal{V}_{t_0} f\| \leq$$

$$\leq 4\|f - \phi\| + \|\mathcal{V}_t \phi - \mathcal{V}_{t_0}\phi\| \leq 5\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\lim_{t \to t_0, t > 0} \|\mathcal{V}_t f - \mathcal{V}_{t_0} f\| = 0$$

i.e. que $t \mapsto \mathcal{V}_t f$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\forall f \in \mathcal{H}$.

(c) (1pt) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x < 0$, alors, en utilisant la définition de la dérivée :

$$\frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{f(x-t) - f(x)}{t}, \quad \forall t > 0$$

donc

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = -f'(x).$$

Si $x > 0$, alors :

$$\frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = \frac{f(x-2t) - f(x)}{t} = 2\frac{f(x-2t) - f(x)}{2t}, \quad \forall t \in]0, x/2[,$$

donc

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = -2f'(x).$$

De plus, on remarque que ψ et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\psi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Il en résulte :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = -\psi'(x) f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

6. (a) (1pt) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h f_h(x) = \mathcal{V}_h f_h(x+h) = f_h\left(\psi(\psi^{-1}(x+h) - h)\right) \in \{0, 1\}.$$

On en déduit :

$$\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h f_h(x) = 1 \iff -h \le \psi(\psi^{-1}(x+h) - h) \le 0$$

$$\iff 0 \le \psi^{-1}(x+h) \le h \iff -h \le x \le h$$

donc $\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h f_h(x) = \chi_{[-h,h]}$.

On suppose que $(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^{n-1} f_h = \chi_{[-h,(n-1)h]}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^n f_h(x) = \mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h \circ (\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^{n-1} f_(x) = \mathcal{V}_h \chi_{[-h,(n-1)h]}(x+h) =$$

$$= \chi_{[-h,(n-1)h]}\left(\psi(\psi^{-1}(x+h) - h)\right) \in \{0, 1\}.$$

On en déduit :

$$(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^n f_h(x) = 1 \iff -h \leq \psi(\psi^{-1}(x+h)-h) \leq (n-1)h \iff$$

$$\iff -h \leq \psi^{-1}(x+h)-h \leq 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq 2\left(\psi^{-1}(x+h)-h\right) \leq (n-1)h$$

$$\iff 0 \leq \psi^{-1}(x+h) \leq h \quad \text{ou} \quad h \leq \psi^{-1}(x+h) \leq \frac{(n+1)h}{2}$$

$$\iff 0\frac{(x+h)}{2} \leq h \quad \text{ou} \quad h\frac{(x+h)}{2} \leq \frac{(n+1)h}{2} \iff -h \leq x \leq nh,$$

i.e. : $(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^n f_h = \chi_{[-h,nh]}$.

(b) (1pt) On a

$$\|f_h\|^2 = \int_{-h}^{0} dx = h$$

De a), on déduit donc que

$$\|(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^n f_h\|^2 = \|\chi_{[-h,nh]}\|^2 = \int_{-h}^{nh} dx = (n+1)h = (n+1)\|f_h\|^2.$$

(c) (1pt) De b) on déduit :

$$|||(\mathcal{U}_{t/n} \circ \mathcal{V}_{t/n})^n||| \geq \frac{\|(\mathcal{U}_{t/n} \circ \mathcal{V}_{t/n})^n f_{t/n}\|}{\|f_{t/n}\|} = \sqrt{n+1} \to +\infty$$

Partie IV (15 pts)

1. (2pts) Soit $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$. Alors, $(A_n u_n)_n \in \mathcal{H}$ et $(B_n u_n)_n \in \mathcal{H}$. Donc, $\mathcal{H}$ étant un espace vectoriel, $((A_n+B_n)u_n)_n = (A_n u_n)_n + (B_n u_n)_n \in \mathcal{H}$ comme somme de deux éléments de $\mathcal{H}$. Donc $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{D}_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$.
   Soit $u \in \mathcal{H}$. En notant $e^{(n)}$ le nième élément de la banse canonique de $\mathcal{H}$, i.e. la suite définie par : $e_k^{(n)} = \delta_{kn}, \quad \forall k > 0$, on a $u = \sum_{n>0} u_n e^{(n)}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ tel que

$$\sum_{n>N} |u|_n^2 \leq \varepsilon.$$

   Alors $u^{(N)} := \sum_{n=1}^{N} u_n e^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ et $\|u - u^{(N)}\|^2 \leq \varepsilon$.

2. (a) (1pt) D'après 1) avec $B = A = \mathcal{A}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ est dense dans $\mathcal{H}$. D'après le théorème de prolongement par densité, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\mathcal{A}}, \mathcal{H})$ se prolonge de façon unique en un opérateur $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Par récurrence sur k, chaque terme $\dfrac{(-t)^k}{k!} A^k$ est bien défini comme un opérateur de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_A, \mathcal{H})$ et en appliquant à nouveau 1) avec $B = \dfrac{(-t)^k}{k!} A^k$, les sommes partielles de la série $e^{-t\mathcal{A}}$ sont des opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_A, \mathcal{H})$. On en déduit que $\mathcal{U}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_A, \mathcal{H})$ se prolonge par le théorème de densité en $\mathcal{U}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $\forall t \geq 0$.

L'application $\mathcal{U}_t$ est linéaire sur $\mathcal{H}$ et comme A_n est positive, $\forall n \geq\ 0$, on déduit de I.5.b) :

$$|||\mathcal{U}_t||| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

i.e. $\mathcal{U}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$,

On a : $\forall u \in \mathcal{H}$, $\forall t \geq 0$.

$$(\mathcal{U}_0 u)_n = u_n, \quad \forall n > 0, \quad \text{i.e. } \mathcal{U}_0 u = u.$$

et (ii) est vrai.

Soit $t, s \geq 0$. On obtient (i) en utilisant I.3c) avec $A = tA_n$ et $B = sA_n$.

Soit $t_0 \geq 0$ et soit $t > 0$. Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{t \to t_0, t > 0} \|e^{-tA_n} u_n - e^{-t_0 A_n} u_n\| = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Comme de plus : $\forall n \geq 0$,

$$\|e^{-tA_n} u_n\| \leq |||e^{-tA_n}||| \|u_n\| \leq \|u_n\|$$

d'après I.5.b), et que $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|^2 < +\infty$ par définition de $\mathcal{H}$, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{t \to t_0, t > 0} \|\mathcal{U}_t u - \mathcal{U}_{t_0} u\| = 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

donc (iii) est vrai.

(b) (2pts) Soit $u \in \mathcal{H}$. On a, au moins formellement : $\forall t \geq 0$,

$$\left\|\frac{1}{t}(e^{-t\mathcal{A}}u - u) + \mathcal{A}u\right\|^2 = \sum_{n\geq 0}\left\|\frac{1}{t}(e^{-tA_n}u_n - u_n) + A_n u_n\right\|^2 =$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left\|-\sum_{k\geq 2}(-t)^{k-1}\frac{A_n^k}{k!}u_n\right\|^2 \leq \sum_{n\geq 0}|t|^2\left(\sum_{k\geq 2}|t|^{k-2}\frac{\|A_n\|^k}{k!}\|u_n\|\right)^2.$$

Il en résulte : $\forall t \in [0,1]$,

$$\left\|\frac{1}{t}(e^{-t\mathcal{A}}u - u) + \mathcal{A}u\right\|^2 \leq \sum_{n\geq 0}|t|^2\left(\sum_{k\geq 2}\frac{\|A_n\|^k}{k!}\|u_n\|\right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{n\geq 0}|t|^2\left(e^{\|A_n\|}\|u_n\|\right)^2.$$

Par hypothèse, A_n est positive, $\forall n \geq 0$, donc, de I.5b) on déduit que

$$\left\|\frac{1}{t}(e^{-t\mathcal{A}}u - u) + \mathcal{A}u\right\|^2 \leq \sum_{n\geq 0}|t|^2\|u_n\|^2 = |t|^2\|u\|^2,$$

i.e. : $\forall t \in [0,1]$,

$$\left\|\frac{1}{t}(e^{-t\mathcal{A}}u - u) + \mathcal{A}u\right\| \leq |t|\|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

On ne déduit que : $\forall u \in D_{\mathcal{A}}$,

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}(e^{-t\mathcal{A}}u - u) + \mathcal{A}u\right\| = 0.$$

La convergence ayant lieu dans $\mathcal{H}$, elle est vraie ssi $u \in D_{\mathcal{A}}$ et $D(\mathcal{A}) = D_{\mathcal{A}}$.

3. (a) (1pt) On a : $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$A_n x \cdot x = \lambda((1+2n)x_1^2 + x_2^2) \geq \lambda\|x\|^2$$

car $\lambda > 0$. De plus

$$\ln\left(\frac{2}{a^2}\right) = \ln(2) - 2\ln(a) \geq \ln(2) > 0$$

car $0 < a < 1$, donc

$$\lambda = e^{\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{2}{a^2}\right)} \geq 1.$$

On en déduit : $\forall u \in \mathcal{H}$,

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle = \langle u, \mathcal{A}u\rangle = \sum_{n>0} A_n u_n \cdot u_n \geq \sum_{n>0} \|u_n\|^2 = \|u\|^2.$$

(b) (2pts) On a

$$B_n = n \begin{pmatrix} 1+\cos\theta_n & \sin\theta_n \\ \sin\theta_n & 1-\cos\theta_n \end{pmatrix}.$$

La matrice B_n étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe une matrice P_n orthogonale telle que $B_n = P_n D_n P_n^{-1}$ où D_n est diagonale. De plus, la diagonale de D_n est formée par les valeurs propres de B_n qui sont les racines de : $\det(B_n - \lambda I) = \lambda^2 - 2n\lambda$, i.e. 0 et $2n$.
On en déduit, le produit scalaire étant invariant par P_n : $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$B_n x \cdot x = x \cdot B_n x = 2nx_1^2 \geq 0$$

puis : $\forall u \in \mathcal{H}$,

$$\langle \mathcal{B}u, u\rangle = \langle u, \mathcal{B}u\rangle = \sum_{n>0} B_n u_n \cdot u_n \geq 0.$$

4. (a) (1pt) Le calcul donne :

$$P_n = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) & -\sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \\ \\ \sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad P_n^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) & \sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \\ \\ -\sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) & \cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|B_n^\alpha x\|^2 - a^2\|A_n^\alpha x\|^2 = \|D_n^\alpha P_n^{-1} x\|^2 - a^2\|A_n^\alpha x\|^2 =$$

$$= (2n)^{2\alpha}\left(\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)x_1 + \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)x_2\right)^2 - 2\left((1+2n)^{2\alpha}x_1^2 + x_2^2\right) \leq$$

$$\leq (2n)^{2\alpha}\left(2\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^2 x_1^2 + 2\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)^2 x_2^2\right) - 2\left((1+2n)^{2\alpha}x_1^2 + x_2^2\right) =$$

$$= (2n)^{2\alpha}\left((2-\varepsilon)x_1^2 + \varepsilon x_2^2\right) - 2\left((1+2n)^{2\alpha}x_1^2 + x_2^2\right) =$$

$$= \left((2n)^{2\alpha}(2-\varepsilon) - 2(1+2n)^{2\alpha}\right)x_1^2 + \left((2n)^{2\alpha}\varepsilon - 2\right)x_2^2 \leq \left((2n)^{2\alpha}\varepsilon - 2\right)x_2^2$$

avec, par définition de ε : $(2n)^{2\alpha}\varepsilon = 2$. donc

$$\|B_n^\alpha x\|^2 - a^2\|A_n^\alpha x\|^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

On conclut avec $x = u_n$ et $u \in \mathcal{H}$.

(b) (1pt) Soit $u \in \mathcal{H}$. De a), on déduit :

$$\|\mathcal{B}^\alpha u\|^2 = \sum_{n>0} \|B_n^\alpha u_n\|^2 \leq a^2 \sum_{n>0} \|A_n^\alpha u_n\|^2 = a^2\|\mathcal{A}^\alpha u\|^2 \leq +\infty.$$

Il en résulte que $\mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha) \subset \mathcal{D}(\mathcal{B}^\alpha)$ et que

$$\|\mathcal{B}^\alpha u\| \leq a\|\mathcal{A}^\alpha u\| < +\infty, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha).$$

5. (2pts) On a

$$A_n + B_n = (\lambda(n+1) + n)I + n\left((\lambda + \cos\theta_n)J + \sin\theta_n K\right) =$$

$$= a_n I + b_n(\cos\phi_n J + \sin\phi_n K)$$

où $b_n > 0$, ϕ_n sont les coordonnées polaires définis par :

$$b_n\cos\phi_n = n(\lambda + \cos\theta_n), \quad b_n\sin\phi_n = n\sin\theta_n, \quad \phi_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

i.e. :

$$b_n = n\sqrt{(\lambda + \cos\theta_n)^2 + (\sin\theta_n)^2}, \quad \tan\theta_n = \frac{\sin\theta_n}{\lambda + \cos\theta_n} > 0$$

car $\theta_n \in]0, \pi[$ par définition. Des conditions $\tan\phi_n > 0$ et $\phi_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on déduit que $0 < \phi_n < \frac{\pi}{2}$. Dans 3).b), on a vu que A_n et B_n sont symétriques, donc $A_n + B_n$ est symétrique. On en déduit que $A_n + B_n$ est diagonalisable dans une base orthonormée. Le calcul montre que les valeurs propres de $A_n + B_n$ sont les racines de

$$\det(A_n + B_n - \lambda I) = (a_n - \lambda)^2 - b_n^2$$

i.e. $a_n \pm b_n$. Donc il existe une matrice Q_n orthogonale telle que

$$A_n + B_n = Q_n \begin{pmatrix} a_n + b_n & 0 \\ 0 & a_n - b_n \end{pmatrix} Q_n^{-1}.$$

6. (1pt) D'après I.2.b) et par linéarité de la trace, on a : $\forall n > 0$,

$$|\mathrm{Tr}\left((e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n})^n\right) - \mathrm{Tr}(e^{-t(A_n+B_n)})\big)\,| =$$

$$= |\mathrm{Tr}\left((e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n})^n - e^{-t(A_n+B_n)}\right)| \leq$$

$$\leq 2|||(e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n})^n - e^{-t(A_n+B_n)}|||$$

7. (a) (1pt) Soit $n > 0$, $t > 0$. De 5), on déduit que

$$\mathrm{Tr}(e^{-t(A_n+B_n)} = \mathrm{Tr}(Q_n e^{-tD_n} Q_n^{-1}) = \mathrm{Tr}(e^{-tD_n}) = e^{-ta_n}(2\cosh(tb_n))$$

où l'on a posé $D_n = \begin{pmatrix} a_n + b_n & 0 \\ 0 & a_n - b_n \end{pmatrix}$.

(b) (1pt) Par définition de b_n et θ_n :

$$tb_n = tn\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda(1-\varepsilon_n) + 1} = tn\sqrt{(\lambda+1)^2 - 2\lambda\varepsilon_n} =$$

$$= tn(\lambda+1)\sqrt{1 - \frac{2\lambda\varepsilon_n}{(\lambda+1)^2}} =$$

$$= tn(\lambda+1) - \frac{t\lambda n\varepsilon_n}{(\lambda+1)} - \frac{t\lambda^2 n\varepsilon_n^2}{2(\lambda+1)^3} + o(n\varepsilon_n^2) = tn(\lambda+1) - \frac{t\lambda n\varepsilon_n}{(\lambda+1)} + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2),$$

où :

$$n\varepsilon_n^2 = 2^{2-4\alpha}n^{1-4\alpha} \to 0 \quad \text{car} \quad 4\alpha > 2 > 1.$$

(c) (1pt) D'après a) :

$$\mathrm{Tr}(e^{-t(A_n+B_n)} = e^{-ta_n}(2\cosh(tb_n))$$

avec

$$e^{-ta_n} = e^{-t\lambda}e^{-tn(\lambda+1)}$$

et, d'après b) :

$$tb_n = tn(\lambda+1) + t\tilde{b}_n$$

où :

$$t\tilde{b}_n = -\frac{t\lambda n\varepsilon_n}{(\lambda+1)} + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2) = -\frac{t\lambda}{(\lambda+1)}\frac{1}{(2n)^{2\alpha-1}} + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2) \to 0$$

car $2\alpha - 1 > 0$. On en déduit :

$$2e^{-ta_n}\cosh(tb_n) = e^{-t\lambda}(e^{t\tilde{b}_n} + e^{-2tn(\lambda+1)}e^{-t\tilde{b}_n}) =$$

$$= e^{-t\lambda}e^{t\tilde{b}_n}(1 + e^{-2tn(\lambda+1)}e^{-2t\tilde{b}_n}) =$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + e^{-2tn(\lambda+1)}e^{-2t\tilde{b}_n}) = 1$$

donc

$$\mathrm{Tr}(e^{-t(A_n+B_n)} = 2e^{-ta_n}\cosh(tb_n) = e^{-t\lambda}(1 + t\tilde{b}_n + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)) =$$

$$= e^{-t\lambda}\left(1 - \frac{t\lambda n\varepsilon_n}{(\lambda+1)} + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)\right)$$

8. (a) Soit $n > 0$ et soit $t > 0$. On a :

$$e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n} = e^{-tA_n/(2n)}(e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)})e^{tA_n/(2n)}$$

où $e^{tA_n/(2n)}$ est inversible, d'inverse $e^{-tA_n/(2n)}$. On en déduit que $e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n}$ et $e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)}$ sont semblables, ainsi que $(e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n})^n$ et $(e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)})^n$, et par suite :

$$\mathrm{Tr}((e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n})^n) = \mathrm{Tr}\left((e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)})^n\right).$$

De plus :

$$e^{-tA_n/(2n)} = e^{-t\lambda/(2n)}e^{-t\lambda/2}e^{-t\lambda J/2}$$

$$e^{-tB_n/n} = e^{-t}e^{-t(\cos\theta_n J + \sin\theta_n K)}$$

donc :

$$\left(e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)}\right)^n =$$

$$= e^{-t\lambda}e^{-nt(\lambda+1)}\left(e^{-t\lambda J/2}e^{-t(\cos\theta_n J+\sin\theta_n K)}e^{-t\lambda J/2}\right)^n =$$

$$= e^{-ta_n}\left(e^{-t\lambda J/2}e^{-t(\cos\theta_n J+\sin\theta_n K)}e^{-t\lambda J/2}\right)^n.$$

Par linéarité de la trace :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)}\right)^n\right) =$$

$$= e^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left(\left(e^{-t\lambda J/2}e^{-t(\cos\theta_n J+\sin\theta_n K)}e^{-t\lambda J/2}\right)^n\right).$$

(b) Comme $J^2 = J$, le même raisonnement que pour M dans I.4.c) montre que

$$e^{-t\lambda J/2} = \cosh\left(\frac{t\lambda}{2}\right) I - \sinh\left(\frac{t\lambda}{2}\right) J.$$

En appliquant I.4.c) à $M = \cos(\theta_n)J + \sin(\theta_n)K$, on déduit par ailleurs que

$$e^{-t(\cos(\theta_n)J+\sin(\theta_n)K)} = \cosh(t)I - \sinh(t)(\cos(\theta_n)J + \sin(\theta_n)K).$$

On remarque en outre que :

$$JM + MJ = 2\cos(\theta_n)I, \quad JMJ = \cos(\theta_n)J - \sin(\theta_n)K.$$

Il en résulte :

$$e^{-r\lambda J/2}e^{-t(\cos(\theta_n)J+\sin(\theta_n)K)}e^{-r\lambda J/2} = c_nI - d_nJ - e_nK,$$

puis, compte tenu de a) :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(e^{-tA_n/(2n)}e^{-tB_n/n}e^{-tA_n/(2n)}\right)^n\right) = e^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left((c_nI - d_nJ - e_nK)^n\right).$$

(c) On a

$$c_n^2 = (\cosh(t\lambda))^2(\cosh(t))^2 + (\sinh(t\lambda))^2(\sinh(t))^2(\cos\theta)^2 + \sinh(2t\lambda)\sinh(2t)\cos\theta$$

$$d_n^2 = (\sinh(t\lambda))^2(\cosh(t))^2 + (\cosh(t\lambda))^2(\sinh(t))^2(\cos\theta)^2 + \sinh(2t\lambda)\sinh(2t)\cos\theta$$

donc

$$c_n^2 - d_n^2 = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2(\cos\theta)^2.$$

Il en résulte :

$$c_n^2 - d_n^2 - e_n^2 = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2 = 1.$$

On remarque que $c_n > 0$ et $d_n > 0$ car $\cosh(t) > 0$ par définition de cosh, $\sinh(t) > 0$ car $t > 0$, et $\cos(\theta_n) = 1 - \varepsilon_n > 0$ par hypothèse. De l'égalité $c_n^2 - (d_n^2 + e_n^2) = 1$ on déduit le changement de variable :

$$c_n = \cosh(k_n), \quad \sqrt{d_n^2 + e_n^2} = \sinh(k_n) \quad \text{avec} \quad k_n > 0.$$

De l'égalité $d_n^2 + e_n^2 = (\sinh(k_n))^2$ avec $\sinh(k_n) > 0$, on déduit le chngement de variable :

$$d_n = \sinh(k_n)\cos(\Theta_n), \quad e_n = \sinh(k_n)\sin(\Theta_n), \quad \text{avec} \quad 0 < \Theta_n < \frac{\pi}{2}.$$

On a aussi :

$$c_n = \cosh(k_n) = \cosh(t(\lambda+1)) - \varepsilon_n \sinh(t\lambda)\sinh(t) =: \cosh(t(\lambda+1) + r_n)$$

où $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$. Alors :

$$c_n = \cosh(t(\lambda+1))(1 + o(r_n)) + \sinh(t(\lambda+1))(r_n + o(r_n)) =$$

$$= \cosh(t(\lambda+1)) + r_n \sinh(t(\lambda+1)) + o(r_n).$$

On en déduit :

$$r_n \sinh(t(\lambda+1)) + o(r_n) = -\varepsilon_n \sinh(t\lambda)\sinh(t)$$

donc

$$r_n \sinh(t(\lambda+1)) \sim -\varepsilon_n \sinh(t\lambda)\sinh(t)$$

et alors :

$$o(r_n) = o(\varepsilon_n) = \mathcal{O}(\varepsilon_n^2).$$

Finalement :

$$k_n = t(\lambda+1) - \frac{\sinh(t\lambda)\sinh(t)}{\sinh(t(\lambda+1))}\varepsilon_n + \mathcal{O}(\varepsilon_n^2).$$

(d) On a, d'après I.4.c) :

$$c_n I - d_n J - e_n K = \cosh(k_n) I - \sinh(k_n)(\cos(\Theta_n) J + \sin(\Theta_n) K) =$$

$$= e^{-k_n(\cos(\Theta_n)J + \sin(\Theta_n)K)}$$

donc, d'après 8.b) :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(e^{-tA_n/n} e^{-tB_n/n}\right)^n\right) = e^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left((c_n I - d_n J - e_n K)^n\right) =$$

$$= e^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left(e^{-nk_n(\cos(\Theta_n)J + \sin(\Theta_n)K)}\right) = 2e^{-ta_n}\cosh(nk_n).$$

(e) En posant

$$\alpha(t) = \frac{\sinh(t\lambda)\sinh(t)}{\sinh(t(\lambda+1))},$$

on déduit de c) et d) :

$$\mathrm{Tr}\left(\left(e^{-tA_n/n}e^{-tB_n/n}\right)^n\right) =$$

$$= e^{-t\lambda}e^{-tn(\lambda+1)}\left(e^{tn(\lambda+1)}e^{-\alpha(t)n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)} + e^{-nt(\lambda+1)}e^{\alpha(t)n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)}\right) =$$

$$= e^{-t\lambda}e^{-\alpha(t)n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)}\left(1 + e^{-2nt(\lambda+1)}e^{2\alpha(t)n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)}\right) =$$

$$= e^{-t\lambda}(1-\alpha(t)n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2))(1+o(1)) = e^{-t\lambda}(1-\alpha(t)n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)).$$

9. I-On déduit de 6) :

$$|||(e^{-t\mathcal{A}/n}e^{-t\mathcal{B}/n})^n - e^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})}||| \geq \left|\left(\frac{\sinh(t\lambda)\sinh(t)}{\sinh(t(\lambda+1))} - \frac{t\lambda}{(\lambda+1)}\right)n\varepsilon_n + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)\right|$$

où

$$n\varepsilon_n = \frac{1}{(2n)^{2\alpha-1}}$$