5. Le groupe orthogonal

Soit S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$,

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ opère sur la sphère S^{n-1}. Soit K le sous-groupe d'isotropie du point $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$,

$$K = \{k \in \mathrm{SO}(n) \mid ke_n = e_n\}.$$

C'est le groupe des matrices de la forme

$$k = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } u \in \mathrm{SO}(n-1).$$

Ainsi, K est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$.

5.1. Proposition. *Si $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SO}(n)$ opère transitivement sur la sphère S^{n-1}.*

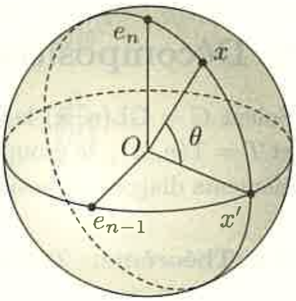
Démonstration. Le théorème se démontre par récurrence sur n.

(a) Si $n = 2$, $\mathrm{SO}(2)$ est le groupe des rotations du plan, et S^1 est le cercle unité. La propriété annoncée est bien vraie.

(b) Supposons la propriété vraie pour $n-1$, et montrons-la pour n. Montrons que pour tout x de S^{n-1} il existe $k \in \mathrm{SO}(n)$ tel que $x = ke_n$. On peut écrire

$$x = \cos\theta\, e_n + \sin\theta\, x',$$

avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ identifié au sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_{n-1}$, $\|x'\| = 1$, c'est-à-dire que x' est un point de la sphère S^{n-2}.
D'après l'hypothèse de récurrence il existe une matrice $u \in \mathrm{SO}(n-1)$ tel que $x' = ue_{n-1}$. Posons



$$k = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_\theta = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Alors,

$$kh_\theta e_n = \sin\theta\, ue_{n-1} + \cos\theta\, e_n = x. \qquad \square$$

5.2. Corollaire. (i) *Tout élément k de $\mathrm{SO}(n)$ s'écrit*

$$k = k_1 h_\theta k_2, \quad \text{avec } k_1, k_2 \in K \simeq \mathrm{SO}(n-1) \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

(ii) *Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe.*

Démonstration. (a) Soit $k \in \mathrm{SO}(n)$, et posons $x = ke_n$. D'après la démonstration de la proposition précédente, on peut écrire $x = k_1 h_\theta e_n$, avec $k_1 \in K$. Ainsi, $h_\theta^{-1} k_1^{-1} k e_n = e_n$, donc $k_2 = h_\theta^{-1} k_1^{-1} k \in K$, ou encore $k = k_1 h_\theta k_2$.

(b) Montrons par récurrence sur n que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe. Pour $n = 2$, la partie $\mathrm{SO}(2)$ est homéomorphe à un cercle, donc connexe. Supposons que $\mathrm{SO}(n-1)$ soit connexe. D'après (i), l'application

$$\mathrm{SO}(n-1) \times \mathbb{R} \times \mathrm{SO}(n-1) \to \mathrm{SO}(n), \quad (k_1, \theta, k_2) \mapsto k_1 h_\theta k_2,$$

est surjective. Puisqu'elle est continue, il en résulte que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe. □

Par suite, le groupe $\mathrm{O}(n)$ possède deux composantes connexes :

$$\mathrm{O}(n)_+ = \{k \in \mathrm{O}(n) \mid \det k = 1\} = \mathrm{SO}(n),$$
$$\mathrm{O}(n)_- = \{k \in \mathrm{O}(n) \mid \det k = -1\}.$$

Notons que $\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs.

5.3. Corollaire. *Les groupes* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_+$ *et* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ *sont connexes.*

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire I-5.2 et de la décomposition polaire dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_+$ et dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. □

6. Décomposition de Gram

Soient $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ le groupe linéaire, $K = \mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal, et $T = \mathrm{T}(n, \mathbb{R})_+$ le groupe des matrices triangulaires supérieures ayant des éléments diagonaux positifs.

6.1. Théorème. *Tout élément* g *du groupe linéaire* $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *s'écrit*

$$g = kt,$$

avec $k \in K$, $t \in T$. *La décomposition est unique.*

L'application

$$K \times T \to G, \quad (k, t) \mapsto kt,$$

est un homéomorphisme.

Cette décomposition s'appelle la *factorisation QR* en analyse numérique matricielle.