TD Analyse - Suites et séries de fonctions, intégration

Comme la précédente, cette feuille a pour vocation à la fois de vous entrainer à l'écrit, de vous faire réviser des exercices classiques, de vous faire passer à l'oral, et de vous proposer du matériel classique (contenu dans les bouquins classiques) pour l'oral.

Quelques références bien utiles: un livre de théorie de la mesure et intégration (Revuz / Briane-Pagès / ...) Zuily Queffelec (un chapitre entier consacré au sujet), Francinou Giannella Nicolas tome 2, Chambert Loir-Fermigier, puis des ouvrages sur Fourier, distributions, ...

1 Suites et séries de fonctions

Exercice 1 Revoyez les différentes notions de convergences de suites / séries de fonctions : simple, uniforme, p.s., absolue, normale, ... Lesquelles impliquent les autres ?

Donnez des exemples et contre-exemples pour chaque notion de convergence, les plus simples possibles.

Exercice 2 (théorèmes de Dini) Dessinez les graphes d'une suite monotone de fonctions continues (non nécessairement monotones).
Dessinez les graphes d'une suite (non nécessairement monotone) de fonction continues monotones.
Montrez qu'une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue est uniformément convergente.
Montrez qu'une suite de fonctions continues monotones qui converge simplement vers une fonction continue est uniformément convergente.
Ces résultats restent-ils vrais si la limite n'est pas continue ?

Exercice 3 (Polynomes de Bernstein) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de polynomes $\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$ converge uniformément vers f.
Indication :
1) Considérer une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes (X_n) de paramètre p. Vérifier que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale.
2) Enoncer la loi faible des grands nombres pour les (X_n). Majorer $P(|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon)$ indépendemment de p par une quantité tendant vers 0 quand $n \to +\infty$.
3) A $p \in [0,1]$ fixé, majorer la quantité $|f(p) - E(f(\frac{S_n}{n}))|$ en distinguant les k/n proches de p ($|k/n - p| \leq \eta$) et les k/n loin de p ($|k/n - p| \geq \eta$), puis conclure.

Exercice 4 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty[$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge.

1. Montrez que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,R]$.
2. Déduisez-en que $\sum a_n R^n = \lim_{x\to R} \sum a_n x^n$.
3. Calculez les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 5 (Equicontinuité) Soit (f_n) une suite de fonctions de $C([0,1])$. On dit qu'elle est équicontinue sur $[0,1]$ si pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(x,\varepsilon) > 0$ tq si $|x-y| \leq \eta$, alors **pour tout** $n \geq 1$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.

1. Supposons que $f_n \in C^1([0,1])$ pour tout $n \geq 1$ et qu'il existe $M > 0$ tq $\sup_{n\geq 1} \|f_n'\|_\infty \leq M$. Montrez que (f_n) est équicontinue sur $[0,1]$.
2. Soit (X,d) un espace métrique. Reformulez la définition d'équicontinuité sur (X,d).
3. Soit (X,d) un espace métrique compact et $T : X \to X$ une isométrie. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit sa moyenne ergodique $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$. Montrez que la famille $(S_n(f))_{n\geq 1}$ est équicontinue.
4. Soit (f_n) une suite équicontinue sur $[0,1]$. Montrez qu'elle est uniformément équicontinue ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, si $|x_y| \leq \eta$ alors pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$.
5. Supposons que (f_n) converge uniformément vers $f \in C([0,1])$. Montrez que (f_n) est équicontinue sur $[0,1]$.
6. Supposons que (f_n) est équicontinue sur $[0,1]$ et converge simplement vers f. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

7. Soit φ_n une suite de $C([0,1]$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \int_0^1 K(x,y)\varphi_n(y)dy$$

est équicontinue.

Exercice 6 (Théorème d'Ascoli) Nous allons démontrer le théorème suivant. Soit (f_n) une suite de $C([0,1])$. On suppose que $sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ et que la suite (f_n) est équicontinue. Alors il existe $f \in C([0,1])$ et $n_k \to \infty$ tq f_{n_k} converge uniformément vers f sur $[0,1]$ quand $k \to +\infty$.

a) Montrez que $[0,1]$ contient une suite dense. Notez $(x_p)_{p\geq 1}$ une telle suite.
b) Montrez qu'il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ indépendante de p, telle que pour tout $p \geq 1$, $(f_{n_k}(x_p))_{k\geq 1}$ converge lorsque $k \to +\infty$.
Le procédé d'extraction diagonale de Cantor est adapté ici.
c) Montrez que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(C([0,1]), \| \|_\infty)$.
d) Concluez.

2 Intégration

Exercice 7 (Intégrale de Riemann) Relire un cours sur le sujet, revoir le lien entre primitive et intégrale. Revoir la notion d'intégrale généralisée ou semi-convergente.

Exercice 8 (Intégrale de Lebesgue) Revoir la construction de l'intégrale de Lebesgue, les grands théorèmes et leurs démos: convergence monotone et dominée, lemme de Fatou, théorème de continuité/dérivabilité/holomorphie sous le signe $\int$. Trouver des exemples et contre-exemples pour les illustrer.

Exercice 9 Étudiez l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$. L'application $t \to \frac{\sin t}{t}$ est-elle intégrable ? Commentez.

Exercice 10 (Intégrales de Wallis) Calculer les intégrales de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt$.

Exercice 11 Soit $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} dx$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, puis un équivalent et un DA à deux termes de u_n.

Exercice 12 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1([0,2\pi])$. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)e^{int} \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.

Exercice 13 Soit $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$. On définit $\varphi * f(x) = \int_\mathbb{R} \varphi(x-y)f(y)dy$.
Vérifiez que $\varphi * f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, que $\varphi * f(x) = f * \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $\varphi * f$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (Méthode de Laplace) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et φ une fonction à valeurs réelles définie sur I, de classe C^2 sur I, tq φ' s'annule uniquement en $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$. Soit f une fonction continue définie sur I, à valeurs complexes, tq $f(x_0) \neq 0$ et $\int_I e^{t\varphi(x)}|f(x)|dx < \infty$ pour tout $t > 0$. Montrer que quand $t \to +\infty$, on a

$$F(t) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}}\, f(x_0)\, \frac{e^{t\varphi(x_0)}}{\sqrt{t}}\,.$$

Exercice 15 (théorème d'Egorov) Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité, et (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant p.s. vers une fonction mesurable m. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble X_ε de mesure au moins $1 - \varepsilon$ sur lequel (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 16 Soit (f_n) une suite de fonctions L^2 qui converge dans L^2 vers $f \in L^2$. Montrer qu'il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge p.s. vers f.

Exercice 17 (Fonctions plateau) Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de K. On souhaite montrer qu'il existe une fonction $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tq $\theta = 1$ sur K, $\theta = 0$ sur Ω^c et $0 \leq \theta \leq 1$.

1. Considérons la fonction définie pour $\|x\| < 1$ par $\exp(\frac{1}{1-\|x\|^2}$ et par 0 si $\|x\| \geq 1$. Montrez qu'elle est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. *Indication : commencez par $n = 1$.*

2. Déduisez-en une fonction ρ qui est C^∞, positive et nulle en dehors de la boule unité, d'intégrale 1.

3. Montrez qu'il existe $\varepsilon > 0$ tq le 2ε-voisinage de K soit inclus dans Ω.

4. Soit $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Quel est le support de ρ_ε ?

5. Montrez que

$$\theta_\varepsilon := \mathbf{1}_{K_\varepsilon} * \rho_\varepsilon : x \to \int_\mathbb{R} \mathbf{1}_K(y)\rho_\varepsilon(x-y)\, dy$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$. Quel est son support ?

6. Vérifiez que θ_ε vaut 1 sur K. Concluez.

Exercice 18 (Théorèmes de densité) Montrez que
* $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de la Convergence uniforme sur les compacts
* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ pour la topologie de la norme C^k,
* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$
* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Indication : l'exercice précédent sera d'une certaine utilité par endroits...

Exercice 19 (Méthode de la phase stationnaire) Le but est de comprendre le comportement de $F(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} a(x)\, dx$. On suppose ici que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ à support compact.

1. Si φ ne s'annule pas sur le support de a, montrez que
$$F(t) = -\frac{1}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{it\varphi(x)} \left(\frac{a}{\varphi'}\right)'(x)\, dx\,.$$
2. Déduisez-en que $|F(t)| \leq C_1 \frac{1}{t}$ lorsque $t \to +\infty$.
3. Par récurrence, montrez que lorsque φ ne s'annule pas sur le support de a, il existe pour tout $N \geq 1$ une constante C_N tq $|F(t)| \leq C_N \frac{1}{t^N}$ lorsque $t \to +\infty$.
4. Supposons maintenant que φ a un unique zéro x_0 sur le support de a, avec $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$. Je vous renvoie à la lecture du théorème VI.3 chap 9 de Zuily Queffelec. On traite d'abord le cas où $\varphi(x) = x^2$, avec les outils de transformée de Fourier (Parseval), puis le cas général.

Exercice 20 (Fonction d'Airy) Etudier la fonction définie par
$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}}\, dx, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}\,.$$
Montrer en particulier qu'elle est C^2 sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est solution de l'équation $u'' - tu = 0$. En déduire qu'elle est C^∞.