Calcul différentiel et géométrie différentielle. Devoir

Préambule :

Cette année, les rappels de « géométrie différentielle » seront faits sous forme d'exercices corrigés.

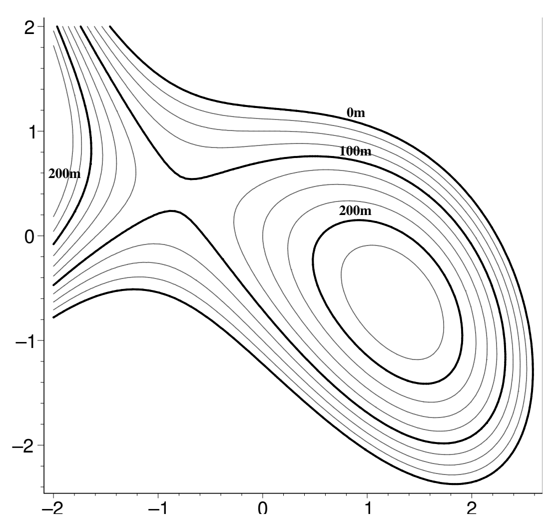
Ce devoir a pour objectifs de
* vous préparer à l'écrit en cherchant les exercices
* vous préparer à l'oral en vous donnant des exercices classiques, importants, ou amusants sur les leçons du programme.

Avant toute chose, repérez des bouquins utiles en calcul diff.
Séance du 24 octobre : Différentielles, extrema : exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19
Séances du 7 novembre : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, exercices 20, 21, 22, 23, 30, 32, 33
Séance du 7 novembre bis: Courbes paramétrées à l'agreg. Exercices 34,35
Séances du 14 novembre : Plus d'exercices de calcul diff. Sous-variétés, extrema liés, exercices 26,27,28,29

Exercice 1 **a)** On veut étudier $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Que fait-on? Quels sont les outils de calcul? De représentation visuelle?
b) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables. Comment (intuitivement) étudier ses variations, ses extrema, la représenter.
c) Même question avec $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
d) Géométriquement (et sans démonstration) comment peut-on ramener l'étude d'une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ à celle d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Manipulations de la définition) **a)** Définition d'une application différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ une application constante. Calculer sa différentielle.
c) Même question avec une application linéaire.
d) Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique, et φ la forme bilinéaire symétrique associée. Calculer la différentielle de q.
e) Soit $f(x, y, z) = (x^2y + \ln(\frac{y}{z}), \sqrt{x^2 - y^2})$. Chercher son ensemble de définition. Calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ dans les directions des axes, sa différentielle au point (x_0, y_0, z_0), son gradient au même point. Quels sont les ensembles dans lesquels vivent tous ces objets (dérivée partielle, gradient, différentielle).
f) Mêmes questions avec les fonctions suivantes : $g(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{y}{x}, x + y\right)$ et $h(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

Exercice 3 (Skieur, exo de L1, initiation douce au calcul diff, exercice de F. Pham) La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île: le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.



1) Partie expérimentale a) Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelle est sa position sur la carte ?[1]

[1]Deux positions possibles

b)Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.
c) Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (a) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles.
Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.
d)Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.
e) La presqu'île est soumise à un fort vent du nord. Coloriez sur la carte la zone de la presqu'île abritée du vent, en essayant de délimiter avec précision le bord de cette zone.
f)En quel(s) point(s) de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?
2) Partie « calculs » En fait la fonction de la figure a pour expression $f(x,y) = -\dfrac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \dfrac{3}{2}$ (les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).
a) Discutez, en fonction du paramètre v, l'allure du graphe de $f_{|y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v).
b) Précisez par le calcul votre résultat de la question 1b).
c) Discutez, en fonction du paramètre u, l'allure du graphe de la fonction $f_{|x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question 1d).
d) Retrouvez et précisez par le calcul votre résultat de la question 1f).
3) Calcul d'un plan tangent Le skieur de 1a) est en fait à l'altitude de 216,66 mètres (mais il ne le sait pas !). Cela correspond à $z = 13/6$ centaines de mètres. Étant dans les conditions de 1a) on peut alors calculer ses coordonnées $x = 1$, $y = 0$: vérifier que ces coordonnées sont cohérentes avec l'équation donnée ci-dessus pour $z = f(x,y)$.
On veut trouver l'équation du plan tangent **P** à l'endroit où est le skieur.
a) On veut trouver la « ligne de plus grande pente » à l'endroit où est le skieur. Quelle est sa direction ? (raisonnez dans le plan **P** en faisant un dessin).
b) Donnez l'équation du profil du relief de la presqu'île passant par le skieur $(1, 0, 13/6)$, et dirigé vers le nord.
c) Donnez un vecteur directeur de la ligne de plus grande pente, puis l'équation de **P**.

Exercice 4 Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $a \in U$, et si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle une dérivée partielle au point a dans la direction de $\vec{v}$? Si oui, donner son expression en fonction de df_a.
b)Donner des exemples d'applications f ayant des dérivées partielles dans toutes les directions $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ au point a mais pas différentiables au point a.

Exercice 5 (Applications linéaires, bilinéaires) a) Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Calculer sa différentielle au point $x \in E$.
b) Soit $\psi : E \times E \to F$ une application bilinéaire. Même question.
c)Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle en $u \in \mathbb{R}^n$ de $v \in \mathbb{R}^n \mapsto < Av, v >$?
d) Même question avec u fixé et l'application $A \mapsto < Au, u >$.

Exercice 6 (Application holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe, et $z_0 \in U$. Quelle propriété vérifie sa différentielle au point z_O, vue comme application linéaire $df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (Projection stéréographique) Étudier l'application $P : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{\text{pole nord}\}$ définie par

$$P : (u,v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$$

(différentiabilité, calcul de la différentielle et des dérivées partielles, image, inversibilité, calcul de l'inverse, ...)

Exercice 8 (Coordonnées polaires) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta))$. Est-elle différentiable? Injective? Surjective? Sur quel(s) ensemble de définition peut-on l'étudier pour améliorer tout cela? (Faire un dessin).
b) Calculer sa jacobienne, son jacobien. Comment l'inverser? Calculer son (ses?) inverse(s) éventuel(s).
c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Exprimer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$ en coordonnées polaires.
d) Application: $f(x,y) = e^{-x^2/2-y^2/2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx$.
e) (Question très pénible à savoir faire) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2, et $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Comment relier $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(r,\theta))$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(r,\theta))$? Exprimer $(\Delta f)(\varphi(r,\theta))$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$.
(On rappelle que $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Exercice 9 (Coordonnées sphériques) Mêmes questions avec $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$\Psi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. Quel est le nom usuel des paramètres θ et φ? (Faire un dessin)

Exercice 10 (Différentielle du déterminant) On considère l'application det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Soit $a \in M_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det $D\det_a$ au point a. (Exo classique, se trouve dans la littérature.)

Exercice 11 Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $A \to A^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle au point a.

Exercice 12 (Différentiation de l'inversion) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = a + c\frac{x-a}{\|x-a\|^2}$ de pôle a et de puissance c. Montrer qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ et calculer sa différentielle au point x. Montrer que la différentielle au point x est une similitude, composée d'une homothétie et d'une réflexion orthogonale par rapport à la perpendiculaire à $x - a$.
2) En déduire que si f est une inversion positive préservant le cercle C, et si $f(M) = M'$, alors tout cercle (ou droite) passant par M et M' est orthogonal à C.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, positive, telle que f'' est bornée. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq M\sqrt{f(x)}$.

Exercice 14 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 2 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 3 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n+1}(\mathbb{R})$. Calculer $\exp(M)$.
Indication : Sur l'espace vectoriel des polynomes de degré au plus n, observer le lien entre M et la dérivation des polynômes. Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et $h \in \mathbb{R}$, à l'aide des formules de Taylor, écrire le polynôme $X \mapsto P(X + h)$ en fonction de P et de M. En déduire l'expression de l'exponentielle de M.

Exercice 15 **a)** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Enoncer une condition nécessaire pour que f ait un extremum au point $a \in U$.
b) Donner des exemples (avec $n = 1$ et $n \geq 2$) pour lesquels cette condition est satisfaite et f a un extremum en a. Donner des exemples ($n = 1$ puis $n = 2$) pour lesquels cette condition est satisfaite et f n'a pas d'extremum en a.
c) Si f est de classe C^2, donner une condition suffisante pour que f ait un extremum en a. Donner des exemples ($n = 1$ puis $n \geq 2$) dans lesquels f a un extremum en a, et cette condition est/n'est pas vérifiée.
d) Etudier les extrema de l'application de l'exercice 3 question **2)**.

Exercice 16 (Extrema liés) **a)** Enoncer le théorème des extréma liés.
b) On considère une boite parallélépipédique de dimensions l, L, h. Sa surface est imposée et vaut S_0. Quel est alors son volume maximal? Même question si son volume est imposé et vaut V_0, quelle est sa surface minimale ? ([2]) Comparer.
c) Mêmes questions avec une boîte cylindrique de rayon r et de hauteur h. Comparer avec les dimensions standard des canettes.

Exercice 17 (Fonctions harmoniques et principe du maximum) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert du plan. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$ est dite harmonique si $\Delta f = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.
a) Montrer que si f est holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors f est harmonique.
b) Montrer que si f est harmonique, alors f vérifie la propriété de la moyenne: pour tout $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$ tels que $D(p, r) \subset U$, on a

$$f(p) = \int_{S(p,r)} f d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it})\, dt\,.$$

c) Que peut-on dire de la réciproque ?
d) (*Principe du maximum*) Montrer que si f est une fonction harmonique sur U et continue sur $\bar{U}$, alors elle n'a pas d'extremum dans l'intérieur de U.

Exercice 18 (Lemme de Schwarz) **a)** Enoncer l'inégalité des accroissements finis.
b) Donner la définition de la différentielle seconde $d^2f(a)$ de f au point a. Montrer que $d^2f(a)$ est bilinéaire.
c) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^2. Montrer que l'application $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire symétrique.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ sinon.
a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
b) Est-elle de classe C^2 ? Pourquoi ?

Exercice 20 (Théorème d'inversion locale) Énoncer le théorème d'inversion locale. Comment l'illustrer? Exemples, applications?

[2] Il s'agit de problèmes logistiques classiques pour fabriquer des emballages peu coûteux.

Exercice 21 (Théorème des fonctions implicites) **a)** Énoncé, exemples, applications.
b) Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Illustrez le théorème des fonctions implicites. Géométriquement, que signifient ses hypothèse(s) et conclusion(s).

Exercice 22 (Perturbation d'application) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, telle que $T(0) = 0$ et 0 n'est pas un point fixe dégénéré, i.e. 1 n'est pas une valeur propre de dT_0.
a) Montrer qu'alors 0 est un point fixe isolé de T, i.e. il existe un voisinage de 0 sur lequel 0 est l'unique point fixe de T. Exemples?
b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, et $T_\lambda := T + \lambda S$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et U voisinage de 0 tels que pour tout $|\lambda| < \delta$, l'opérateur perturbé T_λ a un unique point fixe x_λ dans U. De plus, montrer que l'application $\lambda \in]-\delta, \delta[\to x_\lambda$ est de classe C^1. (on pourra considérer $f(\lambda, x) = T_\lambda(x) - x$).

Exercice 23 (Continuité des racines d'un polynôme) Soit $P_0(X) = X^3 + a_0X^2 + b_0X + c_0$ un polynôme, et x_0 une racine de P_0 telle que $P_0'(x_0) \neq 0$. Montrer que si (a,b,c) est assez proche de (a_0, b_0, c_0) alors $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ a une unique racine proche de x_0.

Exercice 24 (Lagrangien) Soit $E = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \quad C^1\}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie, que l'on munit de sa norme C^1: $\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma(0)\| + \sup_{t\in[0,1]} \|\gamma'(t)\|$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k. Soit $\mathcal{L} : E \to \mathbb{R}$ le *Lagrangien*, défini par $\mathcal{L}(\gamma) = \displaystyle\int_0^1 L(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt$. Montrer qu'elle est de classe C^k.

Exercice 25 (Encore de la méca) Soit $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ la boule ouverte unité, et $\mathcal{F} = \{u : \overline{B} \to \mathbb{R}$ de classe C^2à support compac
On définit l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_B \|\nabla u(x)\|^2\, dx - \int_B F \circ u(x) dx$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1 bornée.
a) Calculer la différentielle de E au point $u_0 \in \mathcal{F}$. En déduire que les points critiques de E (i.e. tels que $dE_{u_0} = 0$) sont solutions d'une EDP. (On admettra la formule de Stokes $\int_B \nabla u \nabla \varphi\, dx = -\int_B \triangle u \varphi dx$)
b) Calculer la différentielle seconde de E.

Exercice 26 (Surfaces) **a)** Donner différentes définitions d'une surface (sous-variété de dimension 2) de $\mathbb{R}^3$ comme
* ensemble des zéros d'une submersion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
* localement l'image d'un plongement $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
* localement le graphe d'une application $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to R$
* ensemble localement modelé sur $\mathbb{R}^2$: chaque point de S a un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ces points méritent d'être précisés (hypothèses), complétés, et l'équivalence entre eux doit être démontrée.
b) Comparer avec la définition de nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$. Pouvez-vous donner un exemple de nappe paramétrée qui ne soit pas une surface (au sens de sous variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$) ? Ou de surface qui ne soit pas une nappe paramétrée?
c) Illustrer chacune de ces définitions de surface avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. (On écrira explicitement chacune des définitions montrant que la sphère est une surface de $\mathbb{R}^3$). Peut-on l'écrire comme nappe paramétrée ?
c) Même question avec l'hyperboloïde à deux nappes $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, l'hyperboloïde à une nappe $z^2 - x^2 - y^2 = -1$, le cylindre $x^2 + y^2 = 1$; et toutes vos quadriques préférées.
d) Même question avec le tore paramétré par $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi[^2 \mapsto ((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\psi)$.

Exercice 27 (Espaces tangents) L'espace tangent en $x \in S$ à la surface est par définition le plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par x et de direction l'ensemble $\{c'(0), c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ courbe $C^1\}$ (ici ε dépend de c. Il s'agit de courbes définies au voisinage de 0.
a) Pour chacune des définitions équivalentes de surfaces, préciser comment on trouve l'espace tangent en un point $x \in S$. (Il suffit de raisonner localement au voisinage de x.)
b) Dans chacun des exemples des question c-d) de l'exercice 26, calculer l'espace tangent en un point quelconque de la surface.

Exercice 28 (Groupes de Lie) Pour nous, un *groupe de Lie linéaire* est un groupe de matrices qui pour un certain $k \in \mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}^k$, qui en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^k$, et tel que de plus les structures de groupe et de sous-variété sont compatibles, à savoir que la multiplication est une application différentiable de $G \times G \to G$, et l'inverse est un difféomorphisme de $G \to G$.
a) Vérifier que chacun des groupes suivants est un groupe de Lie et préciser sa dimension :
$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1\}$, $\quad O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = Id\}$, $\quad SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R})\}$, $SO(q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det A = 1$ et ${}^tABA = B\}$, avec q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et B la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée dans la base canonique, $\quad SU(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(C), {}^t\overline{A}A = Id\}$.
b) Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, et $x \in M$. L'*espace tangent en x à M* est par définition l'ensemble $T_xM := \{c'(0), c :]-1,1[\to M \subset \mathbb{R}^k$ courbe $C^1\}$. Pour chacun des groupes de Lie ci-dessus, préciser quel est son espace tangent en l'identité.

Exercice 29 a) Soit S une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et $a \in S$. Soit $g : U \to \mathbb{R}$ une application C^1 définie sur un voisinage U de S, et $f = g_{|S}$. L'*application linéaire tangente* $T_a f$ est par définition la restriction de dg_a à l'espace tangent $T_a S$. Le point a est un point critique de f si $T_a f = 0$, soit encore lorsque la restriction de dg_a à $T_a S$ est nulle. Montrer que $a \in S$ est un point critique de f ssi $\nabla g(a)$ est orthogonal à $T_a S$. (On rappelle que $\nabla g(a)$ est défini comme l'unique vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $< \nabla g(a), u >= dg_a.u$.)
b) Un exemple célèbre. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, et A la matrice symétrique (inversible) associée dans la base canonique. Vérifier que $\nabla q(x) = 2Ax$.Soit $\Sigma = q^{-1}(1)$. Vérifier que Σ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$. Soit $q_0(x) = \|x\|^2$ (norme euclidienne). Que vaut $\nabla q_0(x)$? Donner les équations satisfaites par les points critiques de q_0 restreinte à Σ. Que doit vérifier le multiplicateur de Lagrange? Discuter l'existence de points critiques de $(q_0)_{|\Sigma}$ en fonction des valeurs propres de A.
c) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une submersion. (Rappeler la définition). Soit $\mathcal{S}_g$ la surface définie par $\mathcal{S}_g = \{x \in \mathbb{R}^3 \, , \, g(x) = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Comment trouver les extrema de la restriction $f_{|\mathcal{S}_g}$ de f à $\mathcal{S}g$? Justifier d'une part à l'aide du théorème des extrema liés, et d'autre part à l'aide de votre intuition géométrique, et d'un dessin.
d) On cherche à minimiser la surface S d'une canette cylindrique, tout en fixant son volume égal à $V = 33cl$. Résoudre le problème à l'aide du théorème des extrema liés.
d) On cherche à maximiser le volume inclus à l'intérieur d'une surface cylindrique de surface fixée S_0. Même question.

Exercice 30 (Lemme de Morse) Soit f une fonction C^∞ à valeurs réelles définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $df_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$, et que $d^2 f_0$ est une forme quadratique non dégénérée.
Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : U \to V$, avec U, V deux voisinages de 0, tel que pour tout $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, on ait

$$f \circ \varphi(x) = f(0) + \frac{1}{2} D^2 f(0)(x,x) \, .$$

Commentaire Après changement de variable convenable, au voisinage de 0, $f(x)$ ressemble à son développement de Taylor à l'ordre 2.

Exercice 31 Quelques compléments à connaître aussi : théorème du rang constant, théorème de Sard, étude des courbes planes et gauches, définition et étude des quadriques. Classification des formes quadratiques et étude locale des surfaces. Surface réglée. ...

Exercice 32 Démontrez le théorème de d'Alembert (tout polynôme à coefficients complexes non constant a au moins une racine) à l'aide du théorème d'inversion locale.

Exercice 33 Montrez que $SO(n)$ est simple avec une preuve de calcul différentiel.

Exercice 34 Démontrez la formule de Cauchy (voir Rudin)

Exercice 35 Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ une courbe simple fermée continue de classe C^1 par morceaux.

1. Vérifiez la définition de chaque terme.

2. Exprimez sa longueur.

3. Enoncez le théorème de Jordan (admis).

4. Soit L sa longueur et S l'aire de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Montrez que

$$L^2 \geq 4\pi S \, .$$

5. Que pouvez-vous dire du cas d'égalité.

Exercice 36 Etudiez la différentiabilité de l'application $v \in E \mapsto \|v\|$, $\|.\|$ étant une norme sur E.
Même question avec l'application $x \in X \to d(x, F)$, où (X, d) est un espace métrique et F un fermé de X.

Exercice 37 Une fonction lipschitzienne est-elle différentiable ? Même question avec une fonction convexe.

Quelques autres idées en vrac:

* théorème de Sard (version facile/version difficile)

* Immersions, submersions, théorème du rang constant

* théorème d'Hadamard-Levy