Le groupe diédral

On appelle *groupe diédral* et on note $G = \mathbb{D}_n$ le groupe des isométries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ qui préservent le polygone régulier à n côtés dont $O = (0,0)$ est le centre et $A = (1,0)$ est un sommet.

Exercice 1 (*Structure par générateurs et relations*, [Ulmer, chap. 1])

1. Démontrez que la rotation $r = r_{O,2\pi/n}$ et la réflexion $s = s_{(OA)}$ appartiennent à G. Démontrez que $srs^{-1} = r^{-1}$ ou, de manière équivalente, $(sr)^2 = 1$.
2. Démontrez que pour tout $g \in G$, il existe $\epsilon \in \{0,1\}$ et $i \in \{0 \dots n-1\}$ uniques tels que $g = s^\epsilon r^i$. (*Utiliser le fait qu'une rotation du plan qui fixe A est l'identité, en rappelant pourquoi c'est vrai.*)
3. Déduisez-en que $|G| = 2n$ puis donnez la liste des ordres des éléments de G.
4. Démontrez que la structure de groupe de G (c'est-à-dire sa table de multiplication) est entièrement déterminée par la donnée des générateurs r, s et des relations $r^n = s^2 = (rs)^2 = 1$.

Exercice 2 (*Classes de conjugaison*, [Goblot, chap. 6, § 6.3])
Décrivez la partition de $\mathbb{D}_n$ en classes de conjugaison en distinguant les cas n impair et n pair.

Exercice 3 (*Centre et sous-groupe dérivé*)
Calculez le centre et le groupe dérivé de $\mathbb{D}_n$ en distinguant les cas n impair et n pair.

Exercice 4 (*Sous-groupes*) Établissez la liste des sous-groupes de $\mathbb{D}_n$. Indiquez lesquels sont distingués. (*On pourra classer les sous-groupes H selon la nature de $H^+ := H \cap \langle r \rangle$.*)

Exercice 5 (*Groupe d'automorphismes*, [Delcourt, exercice 3.3.12])
Soit $G = \mathbb{D}_n$ engendré par deux élements r, s satisfaisant les relations $r^n = s^2 = (rs)^2 = 1$.

1. Montrez que pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$, les éléments $R = f(r)$ et $S = f(s)$ vérifient les relations $R^n = S^2 = (RS)^2 = 1$. Réciproquement, montrez que pour tout couple $(R, S) \in H^2$ tel que $R^n = S^2 = (RS)^2 = 1$ il existe un unique morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $f(r) = R$ et $f(s) = S$.
2. Déduisez de la question précédente que les automorphismes $f : G \to G$ sont les morphismes $f = f_{i,j}$ déterminés par $f(r) = r^i$ et $f(s) = sr^j$, pour $i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Cette question nécessite de connaître le concept de produit semi-direct, pour lequel on renvoie à l'exercice 8. Soient $N := \{f_{1,j};\ j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ et $H = \{f_{i,0};\ i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}$. Montrez que $\mathrm{Aut}(G)$ est le produit semi-direct $N \rtimes_\varphi H$ où φ est l'action naturelle de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}_n)$ est donc l'holomorphe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, voir exercice 9.

Exercice 6 (*Structure de produit semi-direct*, [Delcourt, exercice 3.3.4])

1. Lemme facile : soient A, B deux sous-groupes d'un groupe Γ. On note AB l'ensemble des produits $ab \in \Gamma$ avec $a \in A$, $b \in B$. Montrez que si A ou B est distingué, alors AB est un sous-groupe.
2. On conserve les notations de l'exercice 1. On note $N = \langle r \rangle$ et $H = \langle s \rangle$. Démontrez que :
(i) $N \lhd G$ (*Observez que N est le noyau d'un morphisme $G \to \{\pm 1\}$ construit géométriquement.*)
(ii) l'application $N \times H \to G$, $(n,h) \mapsto G$ est bijective (*Observez que $H \cap N = 1$ et $NH = G$.*)
3. Pour tout $h \in H$, on note $c_h : N \to N$, $n \mapsto hnh^{-1}$ l'endomorphisme de conjugaison. Montrez que $c : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto c_h$ est un morphisme de groupes.
4. Montrez que la structure de groupe de G est entièrement déterminée par la donnée des sous-groupes N, H et de l'action c.

Exercice 7 (*Produit semi-direct*, [Perrin, chap. I, § 6])

1. (PSD interne) Soient G un groupe et $N \lhd G$ un sous-groupe distingué. On note $Q = G/N$ et $\pi : G \to Q$ le morphisme de quotient. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe un sous-groupe $H \subset G$ tel que $H \cap N = 1$ et $NH = G$.
   (ii) Il existe un morphisme de groupes $s : Q \to G$ tel que $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$.

   Lorsque ces conditions sont remplies, on dit que G est *produit semi-direct interne de ses sous-groupes N et H*.
2. (PSD externe) Soient N, H deux groupes et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes.
   (a) On note $h.n := \varphi(h)(n)$. Montrez que la loi définie par $(n, h).(n', h') := (n(h.n'), hh')$ munit l'ensemble $G = N \times H$ d'une structure de groupe d'élément neutre $(1, 1)$.
   (b) Montrez que $i : N \to G$, $i(n) = (n, 1)$ et $j : H \to G$, $j(h) = (1, h)$ sont des morphismes injectifs de groupes. Montrez que $N' = i(N)$ est un sous-groupe distingué.

   Le groupe G est appelé *produit semi-direct externe de N par H relativement à φ* et noté $N \rtimes_\varphi H$.
3. (PSD interne vu comme PSD externe) Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué N et H un sous-groupe tels que G est produit semi-direct interne de N par H. On note φ l'action de H par conjugaison sur N. Montrez que $G \simeq N \rtimes_\varphi H$.
4. (PSD externe vu comme PSD interne) Soient N, H deux groupes, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes, et $G = N \rtimes_\varphi H$ le produit semi-direct externe. Soient $i : N \to G$ et $j : H \to G$ définis comme ci-dessus. Montrez que G est produit semi-direct interne de $N' = i(N)$ par $H' = j(H)$.

Exercice 8 (*Automorphismes intérieurs et centre*, [Delcourt, exercice 1.2.3])
Soit G un groupe. On appelle *centre* de G le sous-groupe $Z(G) = \{g \in G, \forall h \in G, gh = hg\}$. On appelle *automorphisme intérieur* tout automorphisme de la forme $c_g : G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$ pour un $g \in G$. On note $c : G \to \mathrm{Aut}(G)$ l'application $c \mapsto c_g$.

1. Montrez que c est un morphisme de groupes de noyau $Z(G)$.
2. Montrez que l'image $\mathrm{Int}(G) := c(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$.
3. Montrez que c induit un isomorphisme $G/Z(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Int}(G)$.

Exercice 9 (*L'holomorphe d'un groupe*, [Calais, chap. V, exemple 5.50], [Delcourt, exercice 3.3.12])
Soit G un groupe. On note $\varphi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$ le morphisme identité. Démontrez que le produit semi-direct $\mathrm{Hol}(G) := G \rtimes_\varphi \mathrm{Aut}(G)$ vérifie la propriété suivante : tout automorphisme $u : G \to G$ s'étend en un automorphisme *intérieur* $u' : \mathrm{Hol}(G) \to \mathrm{Hol}(G)$.

Références

[Calais] J. Calais, *Éléments de théorie des groupes*, PUF.

[Delcourt] J. Delcourt, *Théorie des groupes*, Dunod.

[Goblot] R. Goblot, *Thèmes de géométrie*, Masson.

[Perrin] D. Perrin, Cours d'algèbre, Ellipses.

[Serre] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann.

[Ulmer] F. Ulmer, *Théorie des groupes*, Ellipses.