TD Analyse - Séries entières , fonctions de la variable complexe

Programme 2020
7.1) Séries entières : Rayon de convergence, propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergenc, continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives. Exponentielle complexe, propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.
7.2) Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann, intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous l'$\int$. Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point. Formules de Cauchy, analyticité d'une fonction holomorphe. principe des zéros isolés, principe du prolongement analytique, principe du maximum. Singularités isolées, séries de Laurent, fonctions méromorphes, théorème des résidus. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité par convergence uniforme.

Biblio : Rudin, real and complex analysis, est un ouvrage extrêmement classique, manque d'exemples.
Amar et Matheron, analyse complex

Quelques exos liés au paragraphe 7.1

Exercice 1 Revoir la définition de dérivable au sens complexe , de développable en séries entières, de holomorphe, méromorphe... Trouver un livre qui vous plait dans lequel toutes les notions du programme sont expliquées et le lire...

Exercice 2 (Lemme d'Abel) Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0,\rho)$ avec $\rho < r$.

Exercice 3 Montrez que le rayon de convergence d'une série entière se calcule par $R^{-1} = \limsup |a_n|^{1/n}$

Vous devez savoir qu'une fonction est holomorphe sur un ouvert Ω si et seulement si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω. Nous allons démontrer ce résultat. L'un des sens est élémentaire.

Exercice 4 (Les séries entières sont holomorphes) Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Vérifiez à la main que f est infiniment dérivable au sens complexe sur son disque (ouvert) de convergence.

Exercice 5 (L'exponentielle complexe) On définit l'exponentielle complexe, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$\exp(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}\,.$$

a) Etudiez le domaine de convergence, absolue convergence, convergence normale de cette série.
b) Rappelez la formule du binôme de Newton.
c) Démontrez à l'aide de la définition et de la formule du binôme de Newton que

$$\exp(a) \times \exp(b) = \exp(a+b)\,.$$

d) Vérifiez $\exp(0) = 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$.
e) Montrez que exp est dérivable au sens complexe sur son domaine de définition, et calculez sa dérivée.
f) Montrez que la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est strictement croissante et positive, et calculez ses limites en $\pm\infty$.
g) Montrez que pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(-it) = \overline{\exp(it)}$, puis que la restriction de exp à $i\mathbb{R}$ est à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
h) Si $t \in \mathbb{R}$, notons $\cos t$ (resp. $\sin t$) la partie réelle (resp. imaginaire) de $\exp(it)$. Utilisez la relation $\exp(it) = \cos t + i\sin t$ pour calculer les dérivées et le développement en série entière de cos et sin.
i) Montrez que cos s'annule sur l'intervalle $[0,2]$. Notons $\frac{\pi}{2}$ son plus petit zéro sur cet intervalle.
j) Vérifiez que $\exp(i\pi/2) = i$, puis que $\exp(z) = 1$ ssi $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
k) Montrez que $t \in \mathbb{R} \to \exp(it)$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.
l) Montrez que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.

Exercice 6 (Argument et logarithme) Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi,\pi[$, on appelle détermination principale du logarithme de z l'application $z \to \log z = \ln r + i\theta$. Vérifiez que cette application est continue et même C^∞ sur $\mathbb{R}^-$ et vérifie $\exp\log z = z$.
Montrez qu'il n'est pas possible de définir un tel logarithme continu sur le cercle unité.

Quelques exos liés au paragraphe 7.2

Exercice 7 (Polynômes) Vérifier qu'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est une fonction entière, i.e. holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8 (Application holomorphe) Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. Montrez que les trois propriétés suivantes sontéquivalentes. **a)** f est dérivable au sens complexe en $a \in U$.
b) Vue comme application de $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f est différentiable en a et sa différentielle en a est une similitude directe.
c) Vue comme application de $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f est différentiable en a et sa différentielle en a est $\mathbb{C}$-linéaire
Lorsque ces conditions sont réalisées, df_a est la multiplication par $f'(a)$.

Exercice 9 (Conditions de Cauchy Riemnan) Montrez que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe sur Ω ssi f est différentiable sur Ω et, en notant $f = u + iv$ avec u et v sa partie réelle et sa partie imaginaire, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vérifiez que ces conditions se réécrivent aussi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = i\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Exercice 10 (intégrale sur un chemin) Soit $\gamma : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une courbe de classe C^1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient l'image $\gamma(I)$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Rappelez ce que signifie la notation $\int_\gamma f$ ou encore $\int_\gamma f(z)dz$. Si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ et si $f = F'$ est la dérivée au sens complexe d'une fonction F définie sur $\Omega \supset \gamma(I)$, vérifiez que $\displaystyle\int_\gamma f = 0$.

Exercice 11 (Indice) Soit $\gamma : I = [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une courbe C^1 fermée (i.e. $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. On définit l'indice d'un point z par rapport à γ par

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z}.$$

a) Montrez que la fonction $\varphi : t \mapsto \exp(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s)-z})$ est dérivable, puis, en dérivant φ, que la fonction $t \to \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ est constante sur $[\alpha, \beta]$.
b) Déduisez-en que $\varphi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(\alpha)-z}$.
c) Montrez que l'indice est une fonction à valeurs entières, qui est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, et vaut 0 sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.
L'indice d'un point par rapport à γ représente le nombre de tours que la courbe fait autour de z.
d) En utilisant **c)**, montrez que lorsque $\gamma(t) = re^{it}$ et $z \in D(0, r)$, l'indice de γ par rapport à z est 1.
e) Montrez que lorsque $\gamma(t) = re^{it}$ et $z \notin D(0, r)$, l'indice de γ par rapport à z est 0.

Exercice 12 (Théorème de Cauchy dans un triangle) Soit f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$. Montrez (lisez la preuve du fait) que si Δ est un triangle inclus dans Ω, alors

$$\int_{\partial Delta} f(z)dz = 0$$

Exercice 13 (Primitives, Cauchy) Soit Ω un ouvert convexe, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$. On cherche à montrer que $f = F'$ pour une certaine fonction holomorphe F. On fixe $a \in \Omega$.
a) Montrez que $z \to F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$ est bien définie et continue sur Ω.
b) Montrez à l'aide du théorème ci-dessus que $F(z) - F(z_0)) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\, d\xi$.
c) Montrez que $F' = f$ sur Ω.
d) Déduisez-en que $\int_\gamma f = 0$ pour toute courbe γ C^1 fermée dans Ω

Exercice 14 (Formule de Cauchy dans un convexe) Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $\gamma : I \to \Omega$ un chemin fermé C^1 (par morceaux). Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $z \in \Omega$, $z \notin \gamma(I)$. En appliquant le théorème précédent à $g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$ prolongée en z par $g(z) = f'(z)$, montrez que

$$f(z) \times Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Exercice 15 Montrez qu'une fonction holomorphe sur Ω est développable en série entière au voisinage de tout point de Ω.

Ceci a des tas de corollaires, comme celui-ci extrêmement important.

Théorème 1 (Prolongement analytique) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert connexe non vide, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f. Si f n'est pas identiquement nulle sur Ω, alors $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω; en particulier, il est au plus dénombrable. Démontrez ce théorème.

Souvent, on l'applique de la manière suivante : soient f et g deux applications holomorphes sur Ω qui coïncident sur un sous-ensemble de Ω ayant un point d'accumulation. Alors elles coïncident partout sur Ω.

Exercice 16 (fonctions trigo) Définition de cos et sin sur $\mathbb{C}$? Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Exercice 17 (Résidus) Soit Ω un ouvert convexe, et g une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$, qui admet un pôle d'ordre m en a, de partie principale $Q(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ (i.e. $g - Q$ est holomorphe sur un voisinage de a). On appelle résidu de g en a le coefficient $c_1 = Res(g, a)$.
a) Soit f une fonction holomorphe sur Ω qui a un zéro d'ordre m en a. Montrez que $\frac{f'}{f}$ a un pôle simple en a, et

$$Res(\frac{f'}{f}; a) = m$$

b) Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ qui a un pôle d'ordre m en a, montrez que $Res(\frac{f'}{f}; a) = -m$. **c)** Soit f une fonction méromorphe sur Ω, avec un unique pôle en a. Soit γ une courbe C^1 fermée de $\Omega \setminus \{a\}$. Alors montrez que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)dz = Res(f, a) \times Ind_{\gamma}(a)\,.$$

d) Soit f une fonction méromorphe sur Ω, avec un nombre fini de pôles $a_1, \ldots, a_N$. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ les parties principales de f au voisinage de ces pôles. Soit $\gamma : I \to \Omega$ une courbe C^1 fermée dont l'image n'intersecte pas les a_i. En appliquant la question précédente aux φ_k, montrez que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} Res(f, a_k) \times Ind_{\gamma}(a_k)\,.$$

En particulier, seuls comptent les pôles de f « à l'intérieur » de γ (i.e. dans les composantes connexes bornées du complémentaire de $\gamma(I)$ dans Ω).

Exercice 18 (Un calcul intégral via les résidus) Soit $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt$.
a) Vérifiez que I est paire, que $I(x) = Re(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt$ et calculez $I(0)$.
b) Vérifiez que $f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}$ s'étend en une fonction méromorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, Im(z) \geq 0\}$ et calculez son résidu en ce pôle.
c) Soit $R > 1$. Notons γ_R la courbe C^1 par morceaux consistant en le segment $[-R, R]$ parcouru de gauche à droite puis le demi-cercle $C(0, R) \cap \{z \in \mathbb{C}, Im(z) \geq 0\}$ parcouru dans le sens trigo. Appliquez le théorème des résidus à l'application $z \to frace^{i\alpha z}1 + z^2$ sur γ_R.
d) Déduisez-en, si $\alpha > 0$, lorsque $R \to \infty$, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt = \pi e^{-\alpha} \quad \text{puis que} \quad I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\,.$$

Exercice 19 (Familles normales, théorème de Montel) Soit $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D} = D(0, 1)$. Pour tout $0 < r < 1$, on note $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{D}, |z| < r\}$.

1. Soit $0 < r < 1$ et $\delta > 0$ tq $r + 2\delta < 1$. Montrez que pour tout $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, tout $z \in \mathbb{D}_r$ et $z' \in D(z, \delta)$, on a

   $$|f(z) - f(z')| \leq \max_{x \in \mathbb{D}_{r+2\delta}} |f(w)| \times |z - z'|\,.$$

   Indication : faites un dessin et utilisez la formule de Cauchy sur $D(z, 2\delta)$.

2. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ qui est bornée sur $\mathbb{D}_{r+2\delta}$ uniformément, i.e. il existe $M_{r+2\delta} > 0$ tq $\sup_{n\geq 1} \sup_{w \in \mathbb{D}_{r+2\delta}} |f_n(z)| \leq M_{r+2\delta}$. Montrez qu'il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}_{r+2\delta})$ et une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telles que en restriction à $\mathbb{D}_{r+2\delta}$, a suite de fonctions f_{n_k} converge uniformément vers f sur $\mathbb{D}_{r+2\delta}$.

3. **Théorème de Montel** Soit (f_n) une suite de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$. On suppose que pour tout $p \geq 1$, la suite (f_n) est bornée (uniformément en n) sur $\mathbb{D}_{1-1/p}$. Alors il existe $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ et $m_k \to \infty$ tq pour tout $\alpha \in (0, 1]$ la suite (f_{m_k}) converge uniformément vers f sur $\mathbb{D}_{1-\alpha}$.

Exercice 20 (Prolongement de la fonction Γ d'Euler) Les questions sont rédigées de façon assez indépendante : vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit Γ la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

1.a. Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que Γ est définie et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$.
1.b. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
2.a. Soit $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,n[}(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$, avec $x > 0$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge simplement vers une fonction f que l'on identifiera.
2.b. En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \qquad \text{pour tout } x > 0\,.$$

3.a. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe une constante $C(R) > 0$ telle que si $k > R$ et $|z| < R$ alors $\left|\ln(1+\dfrac{z}{k}) - -z\ln(1+\dfrac{1}{k})\right| \leq \dfrac{C(R)}{k^2}$.
3.b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq[R]+1}\left(\ln(1+\frac{z}{k}) - z\ln(1+\frac{1}{k})\right)$ converge normalement sur tout disque $D(0,R)$, $R > 0$.
4. Montrer que la fonction $G : z \mapsto \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}$ est définie et entière.
5. Conclure que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Exercice 21 (Prolongement de la fonction ζ de Riemann) Les questions sont rédigées de façon assez indépendante : vous pouvez admettre le résultat d'une question et continuer le plus loin possible.

Soit ζ la fonction définie par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

Prolongement à $\{\operatorname{Re}(s) > 0\}\setminus\{1\}$

1. Montrer (en rédigeant et justifiant très soigneusement) que ζ est définie et holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1\}$.
2. On note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^s} = \int_1^N \frac{dt}{t^s} - s\int_1^N \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}} = \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_1^N \{t\}\frac{dt}{t^{s+1}}\,.$$

3. Soit $g(s) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1}\right)$. Montrer que g est définie et holomorphe sur $\{\operatorname{Re} s > 0\}\setminus\{1\}$. Conclure.

Prolongement à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$

4. Supposons $\operatorname{Re} s > 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 y}(y^{s/2-1})dy\,.$$

5.a. Soit $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$, et $\tilde\theta(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}$. Montrer que θ et $\tilde\theta$ sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elles se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
5.b. On **admet** que $\theta(\frac{1}{t}) = \sqrt{t}\theta(t)$. (Vous pouvez chercher une démonstration, vous-même, ou dans un livre.) Vérifier que $\tilde\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\tilde\theta(\frac{1}{t}) + 1\right) - \frac{1}{2}$.
6. Montrer (en utilisant 4) que $\tilde\theta(y)y^{s/2-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\operatorname{Re}(s) > 1$.
7.a On note $I_1 = \int_0^1 \tilde\theta(y)y^{s/2-1}dy$ et $I_2 = \int_1^{+\infty}\tilde\theta(y)y^{s/2-1}dy$. À l'aide de la question 5.b, montrer que

$$I_1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} t^{-s/2-1/2}\tilde\theta(t)dt.$$

7.b. En déduire que si $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} + \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\int_1^{+\infty}\tilde\theta(y)(y^{-s/2-1/2} + y^{s/2-1})dy\,.$$

8.a. Montrer que (lorsque $s = 1$) $\frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(3/2)} = 1$.
8.b. Montrer qu'on peut écrire $\frac{\pi^{s/2}}{2(s-1)\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{s-1} + \psi(s)$ où ψ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
9. Montrer que l'intégrale de droite dans la question 7b est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ et holomorphe en $s \in \mathbb{C}$. Conclure.