Cours - TD 1 : Autour du théorème de point fixe de Banach

1 Théorème de point fixe de Banach

Théorème 1.1. [Théorème du point fixe]

Soit (E, d) un e.m. complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$.
De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \ \mathbb{N}$, converge vers a de fa con géométrique :

$$d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Exercice 1.2 Contre-exemples sur le point-fixe [Rouvière]
Trouver des contre-exemples dans les cas suivants.

1. X espace métrique, $F : X \to X$ contractante mais n'admet pas de point fixe parce que X n'est pas complet.
2. X espace métrique complet, F contractante mais n'admet pas de point fixe parce que F n'envoie pas X dans X.
3. X espace métrique complet, $F : X \to X$ mais n'admet pas de point fixe parce qu'elle n'est pas contractante, bien qu'elle verifie $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$.
4. X espace métrique complet, $F : X \to X$ admet plusieurs points fixes parce qu'elle n'est pas contractante.

Exercice 1.3 Variantes du théorème de Banach [Rouvière]
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (f composée p fois) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans E. Montrer que, pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers a.
(Ex d'application : thm Cauchy-Lipschitz global)
2. Donner un exemple de fonction f non continue vérifiant les hypothèses de la question 1.

2 Applications

2.1 Application aux suites récurrentes

Exercice 2.1 Nature du point fixe [Rouvière]
I intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $a \in I$ point fixe.

1. Montrer que si $|f'(a)| < 1$ alors a est attractif, ie il existe $J \subset I$ stable par f et tel que $\forall x_0 \in J$, $x_n \to a$. Proposer un équivalent de $x_{n+1} - a$ lorsque f' ne s'annule pas sur J.
2. Montrer que si $f'(a) = 0$, $f \in C^2$ et f'' ne s'annule pas sur J alors a est superattractif, ie $\forall x_0 \in J$, $x_0 \neq a$, $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2}(x_n - a)^2$.
3. Montrer que si $|f'(a)| > 1$ alors a est répulsif, ie il existe $J \subset I$ tel que, $\forall x_0 \in J$, $x_0 \neq a$, (x_n) sort de J.
4. Cas $|f'(a)| = 1$. Donner des exemples
   - où la suite diverge,
   - où la suite converge mais avec convergence sous-linéaire.
     Indication : sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, poser $f(x) = \sin x$ et considérer la suite définie par $x_0 > 0$, $x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$.

Exercice 2.2 Fausses suites de Schwob [adapté de Arnaudiès, Delezoide, Fraysse]
Soient deux réels $0 < a < b$, on définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), \; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones et convergent vers la même limite.
Remarque : les vraies suites de Schwob sont définies par $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$.

Exercice 2.3 Un cas sans point fixe
Trouver une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$ converge, et pourtant f n'admet aucun point fixe.

2.2 Équations non linéaires

2.2.1 Méthode des approximations successives

On souhaite calculer $\tilde{x}$ vérifiant $f(\tilde{x}) = 0$. On remplace $f(\tilde{x}) = 0$ par $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$ avec par exemple $F(x) = x - f(x)$. On utilise alors une suite récurrente du type

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Les exemples suivants présentent différents comportements possibles pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (convergence globale, convergence locale, pas de convergence).

Exercice 2.4 Méthode des approximations successives

1. [Théodor] On souhaite calculer une valeur approchée de la solution positive $\tilde{x}$ de

$$x - \ln(1+x) - 0.2 = 0$$

à l'aide des termes de la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \ln(x_n + 1) + 0.2, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer qu'il y a convergence globale (ie : pour tout $x_0 > 0$ la suite converge vers $\tilde{x}$) et que la convergence est géométrique.

2. [Demailly, p96] On souhaite calculer une valeur approchée des racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide des termes de la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1), \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale (ie : x_0 doit être assez proche de cette racine). Proposer une autre fonction F pour approcher les autres racines.

2.2.2 Méthode de Newton

Exercice 2.5 Convergence locale de la méthode de Newton 1D [Rouvière]

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Pour $x_0 \in [a, b]$, on définit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$ et il existe une constante C telle que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leqslant C|x_n - \tilde{x}|^2$ (convergence quadratique). En déduire que

$$C|x_n - \tilde{x}| \leqslant \Big(C|x_0 - \tilde{x}|\Big)^{2^n}.$$

Proposer une extension à la dimension $d \geq 2$.

2.2.3 Un problème d'existence

Exercice 2.6 Résolution d'une équation fonctionnelle non linéaire

Montrer que l'équation fonctionnelle

$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100 f(t) = \sin(2\pi t)$$

admet une solution f continue et 1-périodique.

2.3 Inversion locale et fonctions implicites

Références pour cette partie : [Rouvière, Cartan]

Théorème 2.7. Théorème d'inversion locale

Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$ de classe C^1. Si $Df(a)$ est un isomorphisme de E sur F, alors il existe un ouvert $V \subset U$, contenant a, et un ouvert $W \subset F$, contenant $b = f(a)$, tel que $f_{|V}$ soit un C^1-difféo de V sur W.

Théorème 2.8. Théorème de point fixe à paramètre

Soient X un espace métrique complet non vide et Λ un espace métrique. Soit $F : X \times \Lambda \to X$ continue et uniformément contractante en x, i.e.

$$\exists k < 1, \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \Lambda, \quad d(F(x, \lambda), F(y, \lambda)) \leq kd(x, y).$$

Alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'équation $F(x, \lambda) = x$ admet une solution unique qui varie continûment avec le paramètre λ.

Théorème 2.9. Fonctions implicites

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U$ et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^p)$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la différentielle $D_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$, et il existe une fonction $\phi : V \to W$ de classe C^1 telle que, pour $(x, y) \in V \times W$,

$$f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

De plus, $D_y f(x, y)$ est inversible en tout point $(x, y) \in V \times W$, ce qui permet de calculer $D\phi(x)$ en résolvant le système linéaire :

$$D_y f(x, \phi(x)) \circ D\phi(x) = -D_x f(x, \phi(x)).$$