Cours - TD 2 : Autres théorèmes de point fixe et applications

1 Théorème de point fixe Brouwer

1.1 Enoncé

Théorème 1.1. Théorème de Brouwer

Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors toute application continue de B dans elle-même admet (au moins) un point fixe.

Remarque : Le thm de Banach est de nature *métrique*, tandis que celui de Brouwer est purement *topologique*.

Preuve : beaucoup de preuves différentes existent.

- via le lemme de Sperner : voir Shashkin
- via les rétractions (la sphère n'est pas un rétract de la boule) : voir Smart, Rouvière pour la dim 2
- d'autres preuves et leurs références sont citées dans Smart.

Corollaire 1.2. Extension du théorème de Brouwer

Le théorème reste vrai si B est remplacée par n'importe quelle partie C homéomorphe à B, en particulier pour C convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

Preuve : un convexe compact d'intérieur non vide est homéomorphe à la boule.

Exercice 1.3 Contre-exemples

Donner des contre-exemples au théorème dans les cas suivants.

1. B boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, $f : B \to B$ continue n'a pas de point fixe ;
2. C compact de $\mathbb{R}^n$, $f : C \to C$ continue n'a pas de point fixe car C n'est pas convexe ;
3. [Contre-exemple de Kakutani] : B boule unité d'un Hilbert H, $T : B \to B$ continue n'a pas de point fixe car H est de dimension infinie.
   Indication : considérer $H = l^2(\mathbb{Z})$ muni de la base hilbertienne usuelle $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et poser $Tx = (1 - \|x\|)y_0 + Ux$, où U est le shift à droite.

1.2 Applications

Exercice 1.4 Champ de vecteurs sur la sphère [Rouvière]
Soit $x \mapsto v(x)$ un champ de vecteurs continu sur B tel que

$$\forall x \in S, \langle x, v(x) \rangle < 0.$$

(le champ sur la sphère est rentrant). Montrer que v s'annule au moins en un point de B.

Exercice 1.5 équations différentielles à donnée périodique [Smart]
Considérons l'équation différentielle

$$X'(t) = f(t, X(t)), X(0) = X_0 \in B$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, f de classe C^1 et T-périodique par rapport à t. On suppose qu'on a, pour tout $X_0 \in B$, existence globale de solutions, qui ne sortent pas de B pour $t > 0$. Montrer qu'il existe $X_0 \in B$ tel que l'équation ait une solution T-périodique.

Exercice 1.6 Théorème de Perron Frobenius [Serre]
Soit A matrice carrée à coefficients positifs ou nuls. Pour deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$, la notation $u \leq v$ signifie : $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $u_i \leq v_i$. On considère

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n, y \geq 0, \|y\|_1 = 1, \rho(A)y \leq Ay\}.$$

Montrer que C est convexe compact non vide. Montrer que, si $A \neq 0$, l'application

$$f : x \in C \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$$

est bien définie, continue, et vérifie $f(C) \subset C$. En déduire l'existence d'un vecteur propre positif pour la valeur propre $\rho(A)$.
Indication : pour montrer que C est non vide, on pourra montrer que si (λ, v) est un couple valeur propre, vecteur propre, avec $|\lambda| = \rho(A)$ et $\|v\|_1 = 1$, alors le vecteur défini par $y = |v|$ appartient à C.

1.3 Extension : théorème de Schauder

Théorème 1.7. Théorème de Schauder [Chambert-Loir, Fermigier, Maillot]

Soit E un Banach, K un convexe fermé non vide de E et $\Phi : K \to K$ continue telle que $\overline{\Phi(K)}$ est compact dans E. Alors il existe $x \in K$ tel que $\Phi(x) = x$.

Rem : dans le cas d'un Hilbert, la preuve est moins technique, on peut utiliser la projection sur le convexe plutôt que de construire à la main une fonction qui laisse le convexe stable (cf poly sur la convexité).

Application : théorème de Cauchy-Peano (voir section EDO).

2 Autres théorèmes de point fixe

2.1 Variantes du thm de Banach

Exercice 2.1 Point fixe faiblement contractant sur un compact [Rouvière]

Soit X un espace métrique compact et $F : X \to X$. On suppose que, pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, on a $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$. Montrer que F admet un unique point fixe et que, $\forall x_0 \in X$, la suite des itérés de x_0 par F converge vers a.
Indication : Considérer $\varphi(x) := d(x, F(x))$.

Exercice 2.2 Point fixe non dilatant sur un compact convexe [Rouvière]

Soit X un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé. Soit $F : X \to X$ telle que, pour tous $x, y \in X$, $\|F(x) - F(y)\| \leqslant \|x - y\|$. Montrer que F admet au moins un point fixe dans X.
Indication : Considérer $F_t(x) := (1-t)F(x) + tF(x_0)$.

2.2 Point fixe holomorphe

Exercice 2.3 Point fixe holomorphe [Rouvière]
Soit f holomorphe sur un ouvert Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, |f(e^{i\theta})| < 1.$$

Justifier que le disque unité fermé est stable par f et que f possède un point fixe unique dans le disque unité.
Indication : Considérer

$$N(t) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)} \mathrm{d}z,$$

où $f_t(z) = z - tf(z), 0 \leq t \leq 1$ et γ est le cercle unité.

3 Applications aux EDO

3.1 Les théorèmes classiques

Théorème 3.1. Cauchy-Lipschitz [Demailly, Rouvière]

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ continue, localement lipschitzienne en x. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un unique intervalle maximal $J \subset I$ et une unique fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Exercice 3.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème ci-dessus.

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$.

1. Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que toute solution de (Σ) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ soit à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$. Alors $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est appelé cylindre de sécurité pour (Σ).
2. Soit $E := C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r_0))$ muni de $\|.\|_\infty$. Pour $x \in E$, on définit
$$\Phi(x) : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n \text{ par } \Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$
Montrer que Φ est bien définie et à valeurs dans E.
3. Montrer que Φ a une itérée contractante. Conclure.

Exercice 3.3 Théorème de Cauchy-Arzela-Peano.

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème ci-dessous.

Théorème 3.4. Cauchy-Arzela-Peano

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto f(t, x)$ continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $T > 0$ et une fonction $x \in C^1((t_0 - T, t_0 + T), \mathbb{R}^n)$ solution de
$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in (t_0 - T, t_0 + T), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$.

1. Reprendre les questions 1. et 2. de l'exercice précédent (Cauchy-Lipschitz).
2. Montrer que $\Phi(E)$ est relativement compact dans E. Conclure.

3.2 L'astuce de linéarisation de Leray et Schauder [Smart]

Idée : remplacer une EDO non linéaire par un pb équivalent de point fixe pour un opérateur qui résout une EDO linéaire.

Ex : on considère le pb de Cauchy
$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), t \in [0, T], \quad x(0) = a, x(T) = b. \tag{1}$$
où f est continue et bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2$. On veut montrer l'existence de solutions. On remarque que pour $y \in C^1$ donnée, l'équation
$$x''(t) = f(t, y(t), y'(t)), t \in [0, T], \quad x(0) = a, x(T) = b.$$
est linéaire, et possède une unique solution globale $U(y)$ dans l'espace $X = C^1([0, T])$. Trouver une solution de (1) est équivalent à trouver un point fixe de U dans X.