Compléments d'Analyse

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

8 septembre 2020

1 Fonctions de la variable complexe

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $a \in \Omega$ si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en a.

f est dite holomorphe sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $a \in \mathbb{C}$.

Pus généralement une application $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ t.q. $A \subset \Omega$ et une application $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe sur Ω qui prolonge f sur Ω.

La dérivabilité par rapport à la variable complexe est plus forte que la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ au sens suivant :

Proposition 1.1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On pose $P = \mathrm{Re}(f)$, $Q = \mathrm{Im}(f)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application f est $\mathbb{C}$-dérivable au point $a \in \mathbb{C}$.*
2. *L'application f est $\mathbb{R}$-différentiable en a et vérifie les relations de Cauchy-Riemann en a :*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a).$$

Définition 1.1.2. Soit $\Omega \subset$ un ouvert. Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, f est développable en série entière au voisinage de z_0, i.e. si $\forall z_0 \in \Omega$, il exste un disque ouvert $D(z_0, r) \subset \Omega$ centré en z_0 t.q. : $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$, $\forall z \in D(z_0, r)$.

Proposition 1.1.2. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique sur l'ouvert Ω, alors f est holomorphe sur Ω.*

Définition 1.1.3. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

1.2 Lacets

Définition 1.2.1. Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \notin \gamma$. On appelle indice de z_0 par raport au lacet γ le nombre :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet.*

1. *L'application $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.*
2. *L'application $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma$.*

Démonstration. 1. On pose :

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z_0}, \quad \forall t \in [a, b]$$

et alors $g'(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$ là où $t \mapsto frac\gamma'(t)\gamma(t) - z_0$ est continue. En de tels points :

$$\frac{d}{dt}e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0) = 0$$

i.e. $t \mapsto e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est constante par morceaux sur $[a, b]$, i.e. constante sur $[a, b]$ par continuité de γ. Il en résulte : $e^{-g(a)}(\gamma(a)-z_0) = e^{-g(b)}(\gamma(b) - z_0)$ et $\gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$, i.e. : $e^{g(b)-g(a)} = 1$. On en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ t.q. $g(b) - g(a) \underset{g(a)=0}{=} g(b) = 2i\pi n$, i.e. :

$$n = \frac{1}{2i\pi}g(b) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z_0} = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \mathrm{Ind}_\gamma(z_0).$$

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ et soit $D(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$. Soit $z_0' \in D(z_0, r/2)$. On a :

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_0')| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{z_0 - z_0'}{(z - z_0)(z - z_0')}dz\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|z_0-z_0'|}{|z-z_0||z-z_0'|}|dz|$$

avec : $\forall z \in \gamma$,

$$|z-z_0'| \geq |z-z_0| - |z-0-z_0'| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0$$

donc

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_0')| \leq \frac{2}{\pi r^2}|z_0-z_0'|$$

□

Pratiquement, le plan $\mathbb{C}$ étant orienté, le nombre $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ est le nombre de tours du lacet autour de z_0 comptés positivement si le lacet tourne dans le sens direct, négativement si le lacet tourne dans le sens indirect.

Exemple 1 (Exemple fondamental)**.** Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{int}$, $R > 0$, et soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Si $z_0 \in D(0, R)$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Rine^{int}dt}{Re^{int}} = n.$$

2. Si $z_0 \notin \overline{D(0, R)}$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \lim_{|\zeta|\to+\infty} \mathrm{Ind}_\gamma(\zeta) = \lim_{|\zeta|\to+\infty} \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}$$

avec :

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}\right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|z-\zeta|} \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{||\zeta|-|z||} \underset{|\zeta|\to+\infty}{\sim} \int_\gamma \frac{|dz|}{|\zeta|} \underset{|\zeta|\to+\infty}{\to} 0$$

Définition 1.2.2. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet. On appelle intérieur, resp. extérieur, de γ, et on note $Int(\gamma)$, resp. $Ext(\gamma)$, l'ensemble :

$$Int(\gamma) = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0\}$$

resp. :

$$Ext(\gamma) = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}.$$

Théorème 1.2.2 (Théorème de Cauchy-Goursat)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine (i.e. Ω est ouvert et connexe) et soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet t.q. $Int(\gamma) \subset \Omega$. On a :*

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Corollaire 1.2.3 (Formule de Cauchy)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet t.q. $Int(\gamma) \subset \Omega$. Soit $z_0 \in \Omega \setminus \gamma$. On a :*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

D'après la Proposition 1.1.2, toute fonction analytique est holomorphe. La formule de Cauchy permet de montrer que la réciproque est vraie, i.e. que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe dans un ouvert Ω ssi f est analytique sur Ω.

Théorème 1.2.4. *Toute application f holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dévelopable en série de Taylor $\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ en tout point $z_0 \in \Omega$ sur le disque ouvert $D(z_0, d_{z_0})$ de rayon $d_{z_0} = \sup\{r > 0,\ D(z_0, r) \subset \Omega\}$. De plus :*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

où $C(z_0, r)$ désigne un cercle de rayon $r > 0$ centré en z_0 de rayon $r \in]0, d_{z_0}[$, orienté positivement.

En particulier, f admet des dérivées $f^{(k)}$ à tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$ holomorphes sur Ω.

1.3 Développement en série de Laurent

Théorème 1.3.1. *Soit $0 \leq r < R$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe sur la couronne*

$$C(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}, r < |z - a| < R\}$$

est développable en série de la forme $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - a)^n$ appelée série de Laurent qui converge normalement sur tout compact $K \subset C(a, r, R)$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall s \in]r, R[$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r,s)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

Définition 1.3.1. Soit $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - a)^n$ le développement en série de Laurent de f dans la couronne $C(a, r, R)$. On appelle partie principale, resp. partie régulière, la somme $\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z - a)^n$, resp. $\sum_0^{+\infty} a_n(z - a)^n$.

Proposition 1.3.2. *Pour toute fonction holomorphe dans la couronne $C(a, r, R)$, pour tout $s \in]r, R[$, l'intégrale $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r,s)} f(z)dz$ est égale au coefficient a_{-1} du terme $\displaystyle\frac{1}{z - a}$ dans le développement en série de Laurent de f.*

Définition 1.3.2. 1. Soit $A \subset \mathbb{C}$ et soit $a \in A$. On dit que a est isolé dans A s'il existe $r > 0$ t.q. $D(a,r) \cap A = \{a\}$ où $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < r\}$.

2. Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est dit discret si tous ses points sont isolés.

Définition 1.3.3. On dit que f admet une singularité isolée au point isolé $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe $r > 0$ t.q. f soit holomorphe sur le disque épointé $D^*(z_0, r) = D(z_0, r) \setminus \{0\}$.

Comme $D^*(z_0, r)$ est une couronne, f admet un développement en série de Laurent sur $D^*(z_0, r)$ de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

On distingue trois types de singularités isolées.

(1) La singularité z_0 est dite apparente si $a_n = 0$, $\forall n < 0$. Alors f est prolongeable en une fonction holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$ par le Théorème de prolongement de Riemann.

(2) La singularité z_0 est appelée un pôle d'ordre $m \geq 1$ si $a_n = 0$, $\forall n < -m$ et alors $f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z \in D^*(z_0, r)$. Une telle application est dite méromorphe.

(3) La singularité z_0 est dite essentielle s'il $a_n \neq 0$ pour une infinité d'indices $n < 0$.

Définition 1.3.4. On appelle résidu de f en z_0 et on note $\mathrm{Res}(f, z_0)$ le coefficient de a_{-1} dans le développement en série de Laurent de f en z_0.

Théorème 1.3.3 (Théorème des Résidus)**.** *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ (i.e. Ω ouvert et connexe). Soit $A \subset \Omega$ un ensemble discret et soit γ un lacet contenu dans $\Omega \setminus A$, d'intérieur contenu dans Ω. Pour toute fonction f holomorphe sur $\Omega \setminus A$, on a la formule des résidus :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathrm{Ind}_\gamma(a) \mathrm{Res}(f, a)$$

2 Polynômes de Bernouilli

2.1 Introduction

Définition 2.1.1 (Fonction Zeta)**.** On appelle fonction Zeta l'application : $\zeta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définie sur $]1, +\infty[$, prolongée à $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Définition 2.1.2 (Fonction Gamma)**.** On appelle fonction Gamma l'application : $\Gamma : s \mapsto \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^t dt$ définie sur $]0, +\infty[$, prolongée à $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

Proposition 2.1.1. *Sur la demi-bande* $\mathrm{Re}(s) > 1$*, les fonctions* ζ *et* Γ *sont reliées par*

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

2.2 Etude de $z \mapsto \dfrac{1}{e^z - 1}$

Proposition 2.2.1. *L'application* $z \mapsto \frac{1}{e^z-1}$ *se développe en série de Laurent sur* $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi\}$ *sous la forme :*

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{b_n}{(2n)!} z^{2n-1}, \quad \forall |z| < 2\pi. \tag{1}$$

où les coefficients b_n*,* $n \geq 1$*, sont appelés nombres de Bernouilli.*

Démonstration. L'application $z \mapsto \frac{1}{e^z-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet pour pôles les racines de $e^z = 1$,i.e. les nombres $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, qui sont des pôles simples. Le résidu en 0 de $z \mapsto \frac{1}{e^z-1}$ est donné par :

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1.$$

On en déduit que $z \mapsto \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi\}$, donc développable en série entière sur le disque ouvert $|z| < 2\pi$. En particulier :

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \frac{z + 1 - e^z}{z(e^z - 1)} \underset{z \to 0}{\sim} \frac{z + 1 - e^z}{z^2}, \quad \forall |z| < 2\pi$$

avec

$$e^z = 1 + z + \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{z + 1 - e^z}{z^2} = -\frac{1}{2}$$

Le calcul donne directement : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2} = \frac{e^z + 1}{2(e^z - 1)}$$

avec $z \in \mathbb{C}\backslash 2i\pi\mathbb{Z} \mapsto \dfrac{e^z+1}{2(e^z-1)}$ impaire, ce qui annulle les coefficients d'ordre pair dans le DL sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi\}$. $\square$

Proposition 2.2.2. *Les coefficients de Bernouilli sont des nombres réels rationnels.*

Démonstration. On peut aussi écrire, au moins formellement :

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z(1-u(z))} = \frac{1}{z}\sum_{k\geq 0} u(z)^k \quad \text{où} \quad u(z) = -\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

Les coefficients b_n s'obtiennent donc à partir d'opérations algégriques (additions, multiplications) sur les coefficents réels rationnels du développement de u. $\square$

2.3 Etude de $z \mapsto \dfrac{e^{zx}}{e^z-1}$, $x \in \mathbb{C}$.

De l'égalité $\Gamma(s) = (s-1)!$, $\forall s \in \mathbb{N}^*$, on déduit que la fonction génératrice de ζ, s'écrit :

$$\sum_{k\geq 1}\zeta(k)z^{k-1} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{tz}}{e^t-1}dt, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Proposition 2.3.1. *Pour tout $x \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto \dfrac{e^{zx}}{e^z-1}$ est développable en série de Laurent sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 2\pi\}$ sous la forme :*

$$\frac{e^{zx}}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{B_n(x)}{n!}z^{n-1}$$

où les coefficients $B_n(x)$, $n \geq 1$, sont des fonctions polynômes en $x \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, l'application $z \mapsto \dfrac{e^{zx}}{e^z-1}$ est méromorphe de mêmes pôles que ceux de $z \mapsto \dfrac{1}{e^z-1}$. Par multiplication avec le développement en série entirère de $z \mapsto e^{zx}$, on obtient directement :

$$\frac{e^{zx}}{e^z-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{B_n(x)}{n!}z^{n-1}, \quad \forall |z| < 2\pi$$

avec $B_n(x)$ fonction polynôme de degré n en x, $\forall n \geq 1$. $\square$

Définition 2.3.1. Avec les notations de la Proposition 2.3.1, on appelle polynômes de Bernouilli les polynômes $B_n(X)$, $n \geq 1$.

Proposition 2.3.2. *Avec les notations de la Proposition 2.3.1,*

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

$$B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X), \quad \forall n \geq 1.$$

$$B_{2k+1}(0) = 0, \quad B_{2k}(0) = (-1)^{k+1} b_k, \quad \forall k \geq 0.$$

Démonstration. Par identification terme à terme des coefficients dans la relation :

$$\frac{e^{z(x+1)}}{e^z - 1} = e^{zx} + \frac{e^{zx}}{e^z - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{C}, \quad \forall |z| < 2\pi,$$

on déduit :

$$B_n(X+1) - B_n(X) = n!X^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

De même, à partir de la relation :

$$\frac{e^{z(1-x)}}{e^z - 1} = -\frac{e^{-zx}}{e^{-z} - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{C}, \quad \forall |z| < 2\pi,$$

on déduit :

$$B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X), \quad \forall n \geq 1.$$

Par comparaison avec (1), on obtient :

$$B_{2k+1}(0) = 0, \quad B_{2k}(0) = (-1)^{k+1} b_k, \quad \forall k \geq 0.$$

□

2.4 Développements trigonométriques des polynômes de Bernouilli

Proposition 2.4.1. *Soit* $r \in]0, 2\pi[$*. On considère le lacet* $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto re^{it}$*. On a*

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{zx} dz}{z^n (e^z - 1)}, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Par définition du résidu :

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \mathrm{Res} \frac{e^{zx}}{z^n (e^z - 1)} \bigg|_{z=0}$$

L'application $z \mapsto \dfrac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}$ admettant $z=0$ pour unique pôle dans le disque ouvert de bord le lacet γ, on a, d'après le Théorème des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^{zx}dz}{z^n(e^z-1)} = \mathrm{Res}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\bigg|_{z=0} = \frac{B_n(x)}{n!}.$$

□

Proposition 2.4.2. *On suppose x réel. Alors : $\forall x \in [0,1]$,*

$$B_{2k}(x) = (-1)^{k+1}2(2k)!\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k}}$$

$$B_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1}2(2k+1)!\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k+1}}$$

les séries étant normalement convergentes sur $[0,1]$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \geq 1$. L'application $z \mapsto \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}$ est méromorphe sur sur $\mathbb{C}$, de pôles $z = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{N}$, simples à l'exception de $z=0$ qui est multiple d'ordre n. Soit $N \geq 1$ et soit $R_N = (2N+1)\pi$. On note γ_N, $k \in [[0,N]]$, le lacet $\gamma_N : t \in [0,2\pi] \mapsto R_N e^{it}$. D'apr'es le Théorème des Résidus :

$$\frac{B_n(x)}{n!}+\sum_{k=1}^{N}\left(\mathrm{Res}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\bigg|_{z=-2ik\pi} + \mathrm{Res}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\bigg|_{z=2ik\pi}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz$$

avec : $\forall k \in [[1,N]]$,

$$\mathrm{Res}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\bigg|_{z=\pm 2ik\pi} = \lim_{z\to\pm 2ik\pi}\frac{e^{zx}(z\mp 2ik\pi)}{z^n(e^z-1)} = \frac{e^{\pm 2ik\pi x}}{(\pm 2ik\pi)^n}.$$

On en déduit :

$$\frac{B_n(x)}{n!} + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{e^{2ik\pi x}}{(2ik\pi)^n} + \frac{e^{-2ik\pi x}}{(-2ik\pi)^n}\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz$$

avec

$$\left|\int_{\gamma_N}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz\right| \leq \int_{\gamma_N}\left|\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\right|\,|dz|.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = s+it$. Alors :

$$\left|\frac{e^{zx}}{(e^z-1)}\right| = \frac{e^{sx}}{|e^z-1|} \leq \frac{1}{|e^z-1|} \quad \text{si} \quad s \leq 0.$$

Si $s > 0$,

$$\left|\frac{e^{zx}}{(e^z-1)}\right| = \left|\frac{e^{-z(1-x)}}{(e^{-z}-1)}\right| = \frac{e^{-s(1-x)}}{|1-e^{-z}|} \leq \frac{1}{|1-e^{-z}|}$$

On remarque que : $\forall z \in \gamma_N$, $|z - 2ik\pi| \geq \pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, donc : $\forall z \in \gamma_N$, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{|e^z - 1|} = \frac{1}{|e^{z-2ik\pi} - 1|} \leq C.$$

Il en résulte :

$$\left|\int_{\gamma_N} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz\right| \leq C\int_{\gamma_N}\frac{|dz|}{|z|^n} = C\int_0^{2\pi}\frac{R_N dt}{R_N^n} = 2i\pi\frac{C}{R_N^{n-1}} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$$

i.e. :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_N}\frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}dz = 0.$$

On en déduit :

$$\frac{B_n(x)}{n!} + \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{e^{2ik\pi x}}{(2ik\pi)^n} + \frac{e^{-2ik\pi x}}{(-2ik\pi)^n}\right) = 0.$$

On conclut en discutant suivant la parité de n.

$\square$

Bibliographie

[1] Dieudonné, J., Calcul Infinitésimal, Hermann, Paris, 1980.