Compléments d'Analyse

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

17 septembre 2020

1 Opérateurs différentiels. Bases de vecteurs propres.

1.1 Introduction

Soit à résoudre : trouver $u(x,t)$ solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x \ < T \tag{1}$$

avec les conditions frontières :

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = u(L,t) = 0,, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq T. \tag{2}$$

Pour résoudre ce problème, on cherche les solutions de la forme : $u(x,t) = \phi(x)T(t)$ où $\phi \in \mathcal{C}^2(0,T)$ et $T \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ sont nécessairement solutions de :

$$\phi(x)T'(t) = kT(t)\phi''(x).$$

Soit : $\Omega = \{(x,t) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+, \ \phi(x)T(t) \neq 0\}$. L'application $(x,t) \mapsto \phi(x)T(t)$ étant continue, Ω est ouvert et on a :

$$\forall (x,t) \in \Omega, \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = Cste.$$

On est ramené à chercher $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. :

$$T'(t) = \lambda k T(t), \quad \Phi''(x) = \lambda \phi(x).$$

Les conditions (2) s'écrivent alors :

$$T(t)\phi(0) = 0 = T(t)\phi(L), \quad \forall t \geq 0$$

et $T \not\equiv 0 \Rightarrow \phi(0) = \phi(L) = 0$ d'où on déduit que (ϕ, T) est solution du problème : trouver (λ, ϕ, T) solution du prblème :

$$\Phi'' = \lambda\phi, \quad \phi(0) = \phi(L) = 0, \tag{3}$$

$$T' = \lambda T. \tag{4}$$

On remarque que si $(\phi_n, T_n)_{n\geq 0}$ est une suite de solutions de (3)–(4), alors toute application $u_p(x,t) = \sum_{n=0}^{p} \phi_n(x)T_n(t)$ est solution de (1). On est ainsi conduit à chercher s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ t.q. $f = \sum_{n\geq 0} a_n\phi_n$. On pose alors $T_n(0) = a_n$, $\forall n \geq 0$, ce qui détermine T_n façon unique.

Remarque 1. Cette méthode dite de séparation des variables ne peut pas toujours s'appliquer.

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1. 1. Soit H un $\mathbb{C}$-ev. On appelle produit scalaire sur H toute application :$H \times H \to \mathbb{C}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ vérifiant :
   a. $\forall u \in H$, $\langle u, u\rangle \geq 0$ et $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$
   b. $\forall (u_1, u_2) \in H$, $\forall v \in H$, $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$,
      $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall u, v \in H$, $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$
   c. $\forall u, v \in H$, $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

2. Soit H un $\mathbb{R}$-ev. On appelle produit scalaire sur H toute application :$H \times H \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ vérifiant (a) et (b) ainsi que
   c'. $\forall u, v \in H$, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

3. On dit que $u \in H$ et $v \in H$ sont orthogonaux et on écrit $u \perp v$ si $\langle u, v\rangle = 0$.

Théorème 1.2.1. *a. L'application $u \in H \mapsto \langle u, u\rangle^{1/2} =: \|u\|$ est une norme sur H et on a : $\forall u, v \in H$,*
   (b) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
      $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff u \perp v$ *(Théorème de Pythagore)*
   (c) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ *(Inégalité de Schwartz).*

Démonstration. c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soit $u, v \in H$. On a

$$0 \leq \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle v, u\rangle + \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + |\lambda|^2\langle v, v\rangle.$$

On pose $\langle u,v\rangle = Re^{i\theta}$. Soit $\lambda = xe^{i\theta}$. Alors, en appliquant la théorie des équations du second degré

$$0 \leq \langle u,u\rangle + 2xR + R^2\langle v,v\rangle \Rightarrow |\langle u,u\rangle|^2 = R^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

avec égalité ssi $u + \lambda v = 0$.

$\underline{a}$. Par définition du produit scalaire : $\forall u \in H$, $\|u\| \geq 0$ et $\|u\| = 0 \iff u = 0$. De plus : $\forall u \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda u\|^2 = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda\langle u, \lambda u\rangle = |\lambda|^2\|u\|^2 \iff \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|.$$

Soit $u, v \in H$. On a :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \leq$$

$$\underset{\underline{c}.}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

□

Définition 1.2.2. On appelle espace de Hilbert tout ev muni d'un produit scalaire qui en fait un espace complet pour la norme associée.

Base d'un espace de Hilbert

Définition 1.2.3. On appelle base d'un espace de Hilbert H toute famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de H vérifiant :

$$\{u \in H, \quad \forall i \in I, \quad \langle u, e_i\rangle = 0\} = \{0\}.$$

Si de plus $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$ et $\forall i \neq j$, $e_i \perp e_j$, la base $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormée.

Proposition 1.2.2. *Tout espace de Hilbert H admet une base orthonrmée.*

Définition 1.2.4. Un espace de Hilbert H est dit séparable s'il existe une suite $(e_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de H qui forme uen base orthonormée de H.

Remarque 2. Les espaces de Hilbert considérés dans la suite seront séparables.

Projection sur un sous-espace de dimension finie

Théorème 1.2.3. *Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille finie orthonormée de H et soit $K = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ le sev engendré.*

$\underline{a}$. $\forall u = \sum_{i=1}^p a_i e_i \in K$, $\forall i \in [[1,p]]$, $a_i = \langle u, e_i\rangle$ et u admet une unique décomposition dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$. De plus : $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^p a_i^2$.

$\underline{b}$. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de K qui converge vers $u \in H$, alors $u \in K$ (i.e. K est fermé).*

$\underline{c}$. *$\forall v \in H$, il existe un unique élément de K noté $p^K v$ et appelé projection orthogonale de v sur K t.q. $\forall u \in K$, $\langle v - p^K v, u\rangle = 0$. De plus $p^K v$ réalise le minimum de la quantté $\|v-u\|$ quand $u \in K$, i.e. :*

$$\|p^K v - v\| = \min_{u\in K} \|v-u\| =: d(v,K) \quad \textit{(distance de } v \textit{ à } K\textit{)}$$

$\underline{d}$. *$H = K \oplus K^\perp$.*

Démonstration. $\underline{a}$. Soit $u = \sum_{i=1}^p a_i e_i \in K$. Le calcul direct donne : $\forall i \in [[1,p]]$,

$$\langle u, e_i\rangle = \sum_{j=1}^p a_j \langle e_j, e_i\rangle = \sum_{j=1}^p a_j \delta_{ij} = a_i.$$

$\underline{b}$. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in K^{\mathbb{N}}$ t.q. $u_n \underset{H}{\to} u \in H$. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sum_{i=1}^p a_i^{(n)} e_i.$$

Par hypothèse, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et d'après le Théorème de Pythagore $\|u_n\|^2 = \sum_{i=1}^p |a_i^{(n)}|^2$. On en déduit que pour tout $i \in [[1,p]]$, la suite $(a_i^{(n)})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente dans $\mathbb{C}$. Soit $a_i^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} a_i \in \mathbb{C}$ et soit $\tilde{u} = \sum_{i=1}^p a_i e_i$. On a :

$$\forall n \geq 0, \quad \|u_n - \tilde{u}\| \leq \sum_{i=1}^p |a_i^{(n)} - a_i| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

car la suite majorante est une somme finie de termes qui convergent vers 0. Par unicité de la limite dans H séparé, $u = \tilde{u} \in K$.

$\underline{c}$. Soit $v \in H$ et soit $p^K v = \sum_{i=1}^p \langle v, a_i\rangle e_i$. Par construction $p^K v \in K$ et on a :

$$\langle v - p^K v, e_i\rangle = \langle v, e_i\rangle - \langle p^K v, e_i\rangle = 0, \quad \forall i \in [[1,p]],$$

donc $\langle v - p^K v, u\rangle = 0$, $\forall u \in K$. On en déduit que $v - p^K v \in K^\perp$. Soit $w \in K$ t.q. $v - w \in K^\perp$. Alors : $\forall i \in [[1,p]]$,

$$\langle v, e_i\rangle = \langle p^K v, e_i\rangle = \langle w, e_i\rangle \underset{\underline{a}.}{\Rightarrow} w = \sum_{i=1}^p \langle w, e_i\rangle e_i = p^K v.$$

De plus : $\forall u \in K$;

$$\|v-u\|^2 = \|v - p^K v + p^K v - u\|^2 = \|v - p^K v\|^2 + \|p^K v - u\|^2$$

d'où on déduit que $\|v-u\|$ est minimum pour le choix $u = p^K v$.

d. Soit $v \in H$. On a : $v = p^K v + v - p^K v \in K^\perp + K$. Si $v \in K \cap K^\perp$, alors : $v \perp p^K v \Rightarrow \|v\|^2 = \langle v, v - p^K v\rangle = 0$, i.e. $v = 0$. Donc la somme $H = K + K^\perp$ est directe.

□

Théorème 1.2.4. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une bon. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i\| = 0 \quad et \quad \|u\|^2 = \sum_{n\geq 0} \langle u, e_n\rangle^2.$$

Réciproquement, la suite de terme général $u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ converge dans H vers $u \in H$ ssi $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2 < +\infty$ et alors $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2$. On écrit alors $u = \sum_{n\geq 0} a_n e_n$.

Démonstration. Soit $u \in H$. On a : $\forall n \geq 0$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i + (u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i) \in K \oplus K^\perp \Rightarrow$$

$$\|u\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i\|^2 + \|u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i\rangle e_i|^2 + \|u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i)\|^2.$$

On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} |\langle u, e_i\rangle e_i|^2 \leq \|u\|^2$, $\forall n \geq 0$ et donc $\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle u, e_i\rangle e_i|^2 < +\infty$. Il en résulte que : $\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|\sum_{i=1}^{n+p} \langle u, e_i\rangle e_i - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{n+p} \langle u, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} |\langle u, e_i\rangle e_i|^2$$

de sorte que la suite de terme général $\sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i$ est de Cauchy dans H donc convergente vers une limite $v \in H$ t.q. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\langle v, e_p\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle\langle e_i, e_p\rangle = \langle u, e_p\rangle$ donc $u = v = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i =: \sum_{i=1}^{+\infty} \langle u, e_i\rangle e_i$ □

1.3 Exemples d'espaces de Hilbert

a. Espace euclidien $\mathbb{R}^n$

L'espace $\mathbb{R}^n$ muni d produit scalaire $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, $\forall u = (u_1, \cdots, u_n)$, $(v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, est un espace de Hilbert. La norme associée est la norme euclidienne $u = (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \|u\| = (\sum_{i=1}^{n} u_i^2)^{1/2}$.

b. L'espace ℓ^2

L'espace ℓ^2 est l'espace des suites de carré sommable :

$$\ell^2 = \{u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

On vérifie immédiatement que ℓ^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

c. L'espace $L^2_\sigma(a, b)$

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et soit $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction t.q. $\sigma(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

On pose :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a, b]), \quad \langle f, g\rangle_\sigma := \int_a^b f(x)g(x)\sigma(x)dx. \tag{5}$$

On vérifie immédiatement que (5) est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b])$ et que $\mathcal{C}([a, b])$ n'est pas complet pour la norme associée. On note $L^2_\sigma(a, b)$ le complété de $\mathcal{C}([a, b])$ pour la norme associée $\|\cdot\|_\sigma$ à (5). En particulier, $L^2_\sigma(a, b) = \overline{\mathcal{C}([a, b])}^{\|\cdot\|_\sigma}$ et l'injection $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\sigma) \to L^2_\sigma(a, b)$ est continue.

Si $\sigma \equiv 1$, alors $L^2_1(a, b) = L^2(a, b)$ et on remarque que

$$f \in L^2_\sigma(ab) \iff \sqrt{\sigma} f \in L^2(a, b)$$

$$\forall f, g \in L^2_\sigma(a, b), \quad \langle f, g\rangle_\sigma = \langle \sqrt{\sigma} f, \sqrt{\sigma} g\rangle_{L^2(a,b)}$$

ce qui permet de se ramener se ramener à $L^2(a, b)$.

Remarque 3 (Plongement de Kuratowski). Tout espace métrique (X, d) se plonge isométriquement dans l'espace vectoriel normé :

$$\ell^\infty(X) := \{u = (u(x))_{x\in X} \in \mathbb{R}^X,\ \sup_{x\in X} \|u(x)\| < +\infty\}.$$

des applications bornées $u : X \to \mathbb{R}$.

Démonstration. On se propose de construire un plongement isométrique $i : X \hookrightarrow \ell^\infty(X)$ appelé *plongement de Kuratowski.* Pour cela, on fixe $x_0 \in X$ et on définit $i(x) \in \mathbb{R}^X$, $\forall x \in X$, en posant :

$$i(x)_y = d(x, y) - d(x_0, y), \quad \forall y \in X.$$

On a : $|d(x,y)-d(x_0,y)| \leq d(x,x_0)$, $\forall y \in X$, $\forall x \in X$, donc $i(x) \in \ell^\infty(X)$, $\forall x \in X$. De plus : $\forall x, x' \in X$, $\forall y \in X$,

$$|i(x)_y - i(x')_y| = |d(x,y) - d(x',y)| \leq d(x,x')$$

avec en particulier : $|i(x)_x - i(x')_x| = d(x,x')$ donc

$$d_\infty(i(x), i(x')) := \sup_{y \in X} |i(x)_y - i(x')_y| = d(x,x'), \quad \forall x, x' \in X$$

i.e. i est une isométrie. $\square$

Remarque 4. Dans la Remarque 3, X est isomorphe à un sous-espace $\hat{X}$ dont l'adhérence $\overline{\hat{X}}$ est fermée dans l'espace complet $\ell^\infty(X)$. On en déduit que $\overline{\hat{X}}$ est complet. Le complété $\overline{\hat{X}}$ de X est unique à un isomorphisme près (le Plongement de Kuratowski). Par construction, X est isomorphe à $\hat{X}$ qui est dense dans $\overline{\hat{X}}$.

Exemple 1 (Exemple de projection)**.** Le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt appliqué au produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ permet de construire à partir de la suite $(x \mapsto x^n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions polynômes $(f_n)_{n\geq 0}$ t.q. : $\forall x \in 0,1]$,

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1), \quad f_2(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1).$$

Soit $K = \mathrm{Vect}(f_0, f_1 f_2)$. Pour tout $g \in L^2(0,1)$, le projeté $p^K g$ est appelé approximation des moindres carrés de g par un élément de K. Par définition :

$$p^K g = \langle g, f_0 \rangle f_0 + \langle g, f_1 \rangle f_1 + \langle g, f_2 \rangle f_2 \Rightarrow$$

$$\forall x \in [0,1], \quad p^K g(x) = \int_0^1 g(u)du + 3(2x-1)\int_0^1 g(u)(2u-1)du +$$

$$+5(6x^2 - 6x + 1)\int_0^1 g(u)(6u^2 - 6u + 1)du.$$

Remarque 5. La convergence dans $L^2_\sigma(a,b)$ est différente de la convegence ponctuelle.

Exemple 2. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \sqrt{n} & \text{si} \quad 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, i.e. $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ simplement dans $[0,1]$. Par construction : $\|f_n\|_2 = 1$, $\forall n \geq 1$ et donc $f_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ dans $L^2(0,1)$.

Exemple 3. Dans $H = L^2(0,1)$. Pour tout $n \geq 0$, on considère la subdivision

$$[0,1] = \cup_{k=1}^{2^n} \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] =: \cup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$

On ordonne les intervalles $I_{n,k}$, $k \in [[1, 2^n]]$, $n \geq 0$:

$$I_{00} = [0,1], \quad I_{1,1}, \quad I_{1,2}, \quad I_{2,1}, \cdots, I_{2,4}, \quad I_{3,1}, \cdots, I_{n,1}, \cdots, I_{n,2^n}, \cdots$$

et $f_n : [0,1] \to \{0,1\}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans le } n \text{ ème intervalle,} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0,1]$ il existe une infinité d'indices $n \geq 1$ t.q. $f_n(x) = 0$ et une infinité d'indices $m \geq 1$ t.q. $f_m(x) = 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ n'existe pas. Par construction : $\forall n \geq 1$, $\exists p_n \geq 1$ et $\exists k_n \in [[1, 2^{p_n}]]$ t.q. :

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \int_{(k_n-1)/2^{p_n}}^{k_n/2^{p_n}} dx = \frac{1}{2^{p_n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

c. Espaces $H^1(a,b)$ et $H^2(a,b)$

Définition 1.3.1. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a,b]$ s'il existe une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)dy.$$

Dans la Définition 1.3.1, si g est continue sur $[a,b]$, alors f est dérivable sur $[a,b]$ de dérivée $f' = g$.

Dans le cas général, soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$ avec $\phi(a) = \phi(b) = 0$. On a, avec les notations de la Définition 1.3.1 :

$$\int_a^b \phi'(x)f(x)dx = \int_a^b \phi'(x) \int_a^x g(s)dsdx = \int_a^b \int_s^b \phi'(x)g(s)dxds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_s^b \phi'(x)dx\right) g(s)ds = \int_a^b (\phi(b) - \phi(s))g(s)ds = -\int_a^b \phi(s)g(s)ds$$

i.e. : $f' = g$ est la dérivée de f au sens des distributions.

Définition 1.3.2. On note $H^1(a,b)$ l'espace des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolument continues sur $[a,b]$ t.q. $f \in L^2(a,b)$ et $f' \in L^2(a,b)$, où f' est la dérivée de f au sens des distributions, muni du produit scalaire : $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_{H^1(a,b)} := \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$.

Proposition 1.3.1. *L'espace $H^1(a,b)$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_{H^1(a,b)}$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in H^1(a,b)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^1(a,b)$. Alors les suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(f'_n)_{n\geq 0}$ sont de Cauchy dans $L^2(a,b)$ qui est complet, donc elles convergent vers $f \in L^2(a,b)$ et $g \in L^2(a,b)$ resp. dans $L^2(a,b)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$ t.q. $\phi(a) = \phi(b) = 0$. On a :

$$\int_a^b \phi'(x)f_n(x)dx = -\int_a^b \phi(x)f'_n(x)dx, \quad \forall n \geq 0$$

d'où on déduit, quand $n \to +\infty$:

$$\int_a^b \phi'(x)f(x)dx = -\int_a^b \phi(x)g(x)dx, \quad \forall n \geq 0$$

i.e. : $f' = g$. $\square$

On définit également $H^2(a,b)$:

Définition 1.3.3. On note $H^2(a,b)$ l'espace des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolument continues sur $[a,b]$ t.q. $f \in L^2(a,b)$ et $f' \in H^1(a,b)$, où f' est la dérivée de f au sens des distributions, muni du produit scalaire : $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle_{H^2(a,b)} := \int_0^1 f(x)g(x)dx + \langle f',g'\rangle_{H^1(a,b)}$.

Proposition 1.3.2. *L'espace $H^2(a,b)$ est un espace de Hilbert.*

1.4 Exemples de bases d'espaces de Hilbert séparables

a. Polynômes de Legendre

On définit sur $[-1,1$ la suite des polynômes de Legendre $(P_n)_{n\geq 0}$ en posant :

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in [-1,1], \quad P_n(x) = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}.$$

En particulier : $\forall x \in [-1,1]$,

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \quad P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\, \frac{(3x^2-1)}{2}$$

On vérifie que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une bon de $L^2(-1,1)$. Toute fonction $f \in L^2(-1,1)$ est donc la limite dans $L^2(-1,1)$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall n \geq 0$, $\forall x \in [-1,1]$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \quad \text{où} \quad a_k = \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx, \quad \forall k \geq 0.$$

et où $\sum_{n\geq 0} a_n^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx$.

Remarque 6. Pour tout $n \geq 0$, P_n est solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad \text{sur} \quad]-1,1[, \quad \lim_{|x|\to 1} y(x) < +\infty.$$

Théorème 1.4.1 (Théorème de convergence)**.** *Toute fonction $f \in L^2(-1,1)$ se développe sous la forme*

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n P_n, \quad a_n = \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx.$$

dans $L^2(-1,1)$. La convergence est uniforme si f et f' sont continues par morceaux et si :

$$\int_{-1}^{1} f'(x)^2 (1-x^2) dx < +\infty.$$

En un point de discontinuité, la limite est $\frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$.

Définition 1.4.1. On pose

$$E = \{ f \in \mathcal{C}^2(-1,1), \ \lim_{x\to\pm 1} |f(x)| < +\infty \}$$

et on considère dans E l'opérateur : $f \mapsto Af = ((1-x^2)f')'$. ON appelle problème aux valeurs propres associé aux conditions aux limites de E le problème : trouver $(\lambda, f) \in \mathbb{C} \times E$, solution de $Af = \lambda f$.

Remarque 7. Le problème aux valeurs propres $Af = \lambda f$ admet pour solutions les éléments propres (λ_n, P_n), $n \geq 0$, où $\lambda_n = -n(n+1)$ et où P_n est le polynôme de Legendre :

$$P_n(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} ((x^2-1)^n)^{(n)}.$$

Proposition 1.4.2. $\Rightarrow$ *C'est une conséquence de ce qui précède.*

$\Leftarrow$ *C'est une conséquence de la théorie des opérateurs compacts auto-adjoints.*

b. Séries de Fourier

Soit $H = L^2_{\mathbb{C}}\left((0,2\pi), \frac{dx}{2\pi}\right)$ l'espace des fonctions $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ t.q. $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ qui en fait un espace de Hilbert.

Proposition 1.4.3. *L'ensemble des fonctions $e_n : x \mapsto e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, est une bon de $L^2_{\mathbb{C}}\left((0,2\pi), \frac{dx}{2\pi}\right)$.*

Définition 1.4.2. Avec les notations de la Proposition 1.4.3, on appelle coefficients de Fourier de $f \in L^2_{\mathbb{C}}\left((0,2\pi), \frac{dx}{2\pi}\right)$ la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de terme général :

$$a_n = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et série de Fourier de f la série de fonctions $x \mapsto \sum a_n e^{inx}$.

Théorème 1.4.4. *Soit $f \in \mathcal{C}([0,2\pi])$, dérivable sur $]0,2\pi[$ de dérivée continue par morceaux. Alosr f est limite uniforme sur $[0,2\pi]$ de sa série de Fourier.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément sur $[0,2\pi]$ vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Bibliographie

[1] Dixmier, J., Topologie Générale, P.U.F., Paris, 1981.

[2] Aubin, J.P., Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.