CONSEILS POUR LES ÉCRITS

Avant de commencer à rédiger les premières questions

(1) Parcourir le sujet pour tenter de **déceler la problématique générale**,

(2) Déterminer et annoter **les corrélations entre questions**.

Dans le sujet 2015, la question 2-3 sur des exemples servait à répondre à la question 2-7 sur les formes quadratiques définies positives de discriminant 20.

(3) Annoter **les résultats de cours** vraisemblablement utiles.

Dans le sujet 2015, la question 1-1-7 sur l'isomorphisme entre les groupes spéciaux orthogonaux des formes quadratiques définies positives et $SO_2(\mathbb{R})$ se ramène par utilisation de la question précédente 1-1-6 à montrer que toute forme définie positive sur $\mathbb{R}^2$ est congruente à la forme quadratique standard $[1, 0, 1]$. Via la question 1-4, la conclusion est fournie par l'existence de bases orthonormées pour les formes quadratiques définies positives, conséquence de l'algorithme de Gramm-Schmidt. La question 1-1-7, plutôt difficile se réduit donc à un résultat bien connu, si on découvre l'architecture de la partie 1-1.

(4) Annoter **vos premières idées**.

Dans le sujet 2015, pour la finitude de l'ensemble $q^{-1}(m) \cap \mathbb{Z}^2$, on devra sûrement utiliser le caractère discret de $\mathbb{Z}^2$ pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

Les premières questions

La rédaction des premières questions doit être précise, complète, concise et propre. Pour cela prenez le temps

(1) de bien **intégrer les préliminaires**.

Dans le sujet 2015, la formule $q(x, y) = {}^tXAX$ ne devait pas être admise, puisqu'il fallait vérifier dans la question 1-1-2 que les coefficients $(\pi(e_1, e_1), 2\pi(e_1, e_2), \pi(e_2, e_2))$ fournissaient un triplet tel que pour tout $(x, y) \in E$, $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.)

(2) d'utiliser un brouillon,

(3) de recopier le titre des parties et indiquer précisément le numéro des questions.

(4) de bien **structurer l'argumentation**.

Dans le sujet 2015, la question 1-1-2 est un énoncé d'existence et d'unicité : les deux parties doivent clairement apparaître dans la rédaction.

(5) et de **citer les propriétés utilisées**.

Dans le sujet 2015, les mots "bilinéaire" et "symétrique" devaient figurer dans la rédaction de la première question.

(6) de ne pas utiliser les mots d'auto-persuasion comme "évidemment", "clairement", "nécessairement".

Dans le sujet 2015, pour la question 1-2-3, pour montrer que la relation d'équivalence propre est réflexive, il vaut mieux écrire « Puisque Id appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$, la relation est réflexive » que « la relation est clairement réflexive ».

(7) de veiller à l'orthographe.

Pour aller loin dans le sujet

(1) sur une feuille de brouillon, **consigner les notations et des définitions** de l'énoncé, ainsi que **les résultats qui semblent importants** et susceptibles d'être ré-utilisés.

Dans le sujet 2015, S_d n'est pas un ensemble de formes réduites. Pour montrer sa finitude dans la question 2-6-(b), il fallait effectivement montrer la finitude du nombre de formes réduites de discriminant d, mais il fallait aussi montrer en quoi ce point entraîne la finitude de S_d, l'ensemble des classes d'équivalence de formes quadratiques définies positives de discriminant d pour la relation d'équivalence propre.

(2) au moment d'entamer une nouvelle partie, la lire dans son intégralité.

(3) devant une question difficile, essayer de **reformuler l'énoncé**.

Dans le sujet 2015, la question 1-2-5 se reformule en la finitude des solutions entières d'une équation $q(x, y) = m$ où q est une forme quadratique définie positive. On reconnaît l'équation d'une conique, et on peut donc chercher le type de cette conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

(4) prendre le temps de **faire une synthèse des propriétés** potentiellement utiles déjà démontrées dans le sujet et des éléments de cours.

Dans le sujet 2015, dans la question 1-2-5 il faut monter qu'un ensemble est fini. Parmi les questions précédentes, les questions 1-1-8 qui fournit une inégalité de norme et 1-2-4 qui fournit une bijection devraient aider.

La question 2-8-c commence par "En déduire que ...". Il faillait passer du temps à synthétiser les sous-questions précédentes : l'équation $(2ax + by)^2 + dy^2 = 4a^2$ n'a que $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ comme solution. Le lien avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ apparaît alors. On est donc conduit à écrire les éléments de $SO(q)$ sous la forme $u = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$. L'équation étudiée précédemment est satisfaite par le premier vecteur colonne car $q(1, 0) = a = q(u(1, 0)) = q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = \frac{1}{4a}\left((2ax + by)^2 + dy^2\right)$.

(5) préférer **utiliser des propriétés déjà démontrées** que de refaire un raisonnement analogue.

Dans le sujet 2015, pour montrer dans la question 2-3 que les formes $[1, 0, 5]$ et $[2, 2, 3]$ ne sont pas proprement équivalentes, il vaut mieux utiliser la question 1-2-4, que de considérer par contradiction une équivalence φ et de dire que, puisque $[2, 2, 3]$ représente 2 en $(1, 0)$, $\varphi(1, 0)$ devrait être une solution de l'équation $x^2 + 5y^2 = 2$, qui n'a pas de solution.

(6) Quand un sujet est abordé, il faut savoir **mobiliser vos connaissances**.

Dans le sujet 2015, la question 3-4 sur l'indépendance de la construction de l'application ν_q par rapport au couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $vx - uy = 1$ devait vous faire penser à la forme générale $(u_0 + kx, v_0 + ky)_{k\in\mathbb{Z}}$ de tous les couples de Bezout.

Même si dans la partie 4, si le contexte général est l'arithmétique, puisque $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\star$ est un groupe fini, on peut garder en tête les résultats de théorie des groupes finis, comme les théorèmes de Lagrange ou de Sylow.

CONSEILS D'ORDRE MATHÉMATIQUE

(1) Il faut veiller à **faire les vérifications** même celles qui peuvent paraître routinières quand on introduit des objets mathématiques. Dans les premières questions, il faut les rédiger toutes de façon concise. Plus loin dans le problème, il faut détailler celles qui ne sont pas routinières.

Dans le problème 2015, même si on parle de $SL_2(\mathbb{Z})$, peut-on vraiment introduire un groupe linéaire GL_2 à coefficients entiers ?

(2) Pour rédiger la solution d'une question portant sur **un comptage**, il vaut mieux utiliser les concepts mathématiques de **"partition"** et de **"injection, surjection, bijection"** que de faire une argumentation libre. En effet, la structure apportée par ces concepts ajoute de la clarté dans la démonstration et surtout de la complétude. Le théorème chinois établit un isomorphisme d'anneaux et en particulier une bijection : il est donc souvent utile dans le comptage en arithmétique.

Dans la question 2-6-b du sujet de 2015 sur la finitude de S_d, la finitude du nombre de formes réduites de discriminant d, et le fait que chaque classe d'équivalence propre contienne une forme réduite, n'implique la finitude du nombre de classes, que parce les classes sont deux à deux disjointes. Cette difficulté ne peut pas être oubliée si on considère l'application bien définie qui à une forme réduite associe "sa" classe.

Dans le sujet 2015, il fallait réaliser que dans la formule pour le nombre de solutions de l'équation $x^2 = v[m]$ demandée dans la question 4-5, le produit correspond à une bijection fournie par le théorème chinois.

(3) Une suite d'inégalités peut être difficile à suivre, si elle n'est pas détaillée par de courts arguments.

Dans le problème de 2015, il y a plusieurs chemins pour montrer que les coefficients (a, b, c) des formes quadratiques réduites sont majorés en module quand le discriminant d l'est. Il était donc nécessaire à chaque pas, d'écrire l'argument utilisé.