La décomposition polaire

Préparation à l'agrégation de mathématiques
Université de Nice - Sophia Antipolis
Antoine Ducros

Décembre 2007

Introduction

Dans ce petit texte, on se propose de démontrer que tout endomorphisme symétrique positif d'un espace euclidien a une unique racine carrée symétrique positive, que l'application « racine carrée » ainsi définie est continue, et qu'elle est même C^∞ si on la restreint à l'ensemble des endomorphismes symétriques *définis* positifs (ce dernier est un ouvert de l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques ; nous établissons également ce fait) ; puis l'on applique ce résultat au théorème de décomposition polaire.

Quelques commentaires.

1) La preuve donnée ici de l'existence et de la continuité de la racine carrée figure à peu près telle quelle dans le livre de géométrie d'Alessandri (p. 149) ; elle ne fait pas appel au théorème d'inversion locale, on utilise simplement le fait qu'une suite de points d'un compact qui a une unique valeur d'adhérence est convergente (mais l'on ne se sert pas de la compacité du groupe orthogonal) ;

2) Le théorème d'inversion locale, ou plus exactement l'un de ses corollaires, le « théorème d'inversion *globale* », joue par contre un rôle essentiel dans da démonstration du caractère C^∞ de la racine carrée (restreinte à l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs).

3) Dans le théorème de décomposition polaire, seules servent l'existence, l'unicité et la continuité de la racine carrée. Vous pouvez donc sauter en première lecture le passage relatif à son caractère C^∞. Mais comme il vous présente une application standard, intéressante et sans réelle difficulté d'un théorème essentiel d'analyse, il serait bon que vous lisiez et le compreniez d'ici la fin de l'année ; ce pourrait très bien faire l'objet d'une question du jury.

4) Les examinateurs aiment bien s'assurer que les candidats savent décliner les théorèmes généraux et compliqués qu'ils énoncent dans les cas élémentaires ; pour cette raison, ce texte se conclut par un paragraphe consacré à ce qui se passe en dimension 1.

Quelques prérequis

Énonçons tout d'abord quelques faits que vous êtes censés connaître, savoir démontrer, et que vous pourriez tout à fait admettre lors d'un développement autour de la décomposition polaire et/ou de ses applications.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit u un endomorphisme de E. On dit que u est *symétrique* si $u = u^*$, c'est-à-dire encore si $< u(x)|y > = < x|u(y) >$ pour tout couple (x, y) de vecteurs de E. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}\ u$ est symétrique ; par ailleurs, u est symétrique si et seulement si il est diagonalisable en base orthonormée.

L'ensemble $\mathsf{Sym}\ E$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathsf{End}\ E$; c'est en particulier un fermé de $\mathsf{End}\ E$ (ce que l'on peut également déduire directement de sa définition).

À partir de maintenant, on suppose u symétrique.

L'application $(x, y) \mapsto < u(x)|y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur E, de forme quadratique associée $q : x \mapsto < u(x)|x >$; si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}\ q = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}\ u$; on dit que u est positif (resp. défini positif) si q est positive (resp. définie positive), autrement dit si $< u(x)|x > \geq 0$ pour tout x dans E (resp. si $< u(x)|x > > 0$ pour tout x non nul dans E) ; dans chacun deux cas, on peut se contenter de vérifier l'inégalité requise pour les vecteurs x de norme 1. On note $\mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$ (resp. $\mathsf{Sym}_{>0}\ E$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs) de E. Il résulte de la définition de $\mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$ que ce dernier est un fermé de $\mathsf{End}\ E$.

En travaillant dans une base orthonormée de diagonalisation de u, on voit que si r (resp. s) désigne le nombre de valeurs propres de u qui sont strictement positives (resp. strictement négatives), alors la signature de q est égale à (r, s). En particulier, u est positif (resp. défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives (resp. strictement positives) ; il est donc défini positif si et seulement si il est positif et inversible.

Supposons E non nul[1]. Notons $\lambda_{\max}(u)$ (resp. $\lambda_{\min}(u)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de u. En se plaçant là encore sur une base orthonormée de diagonalisation de u, on établit sans difficulté les trois égalités suivantes :

$$\lambda_{\max}(u) = \max_{||x||=1} < u(x)|x >,$$

$$\lambda_{\min}(u) = \min_{||x||=1} < u(x)|x >,$$

$$|||u||| = \max(|\lambda_{\max}(u)|, |\lambda_{\min}(u)|),$$

où $|||.|||$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne $||.||$ de E.

Proposition. *$\mathsf{Sym}_{>0}\ E$ est un ouvert de $\mathsf{Sym}\ E$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $E = 0$, alors $\mathsf{End}\ E$ est réduit à l'identité, qui est symétrique et définie positive ; la proposition est donc vraie dans ce cas[2]. Supposons maintenant que $\dim\ E > 0$, et donnons deux preuves.

[1]Cette condition est faite pour s'assurer que l'ensemble des valeurs propres de u est *non vide*, et possède donc bien un plus grand et un plus petit élément ; si cette remarque vous plonge dans un abîme de perplexité, ignorez-la en première lecture et réfléchissez-y ultérieurement à l'occcasion.

[2]Là encore, si cela vous déplaît, vous pouvez ignorer ce fait ; personne ne vous en voudra si vous vous contentez d'énoncer cette proposition pour les espaces de dimension strictement positive...

Première preuve. Soit u appartenant à $\mathsf{Sym}_{>0}\, E$; le réel $\lambda_{\min}(u)$ est strictement positif. Soit $v \in \mathsf{Sym}\, E$ tel que $|||v||| < \lambda_{\min}(u)$ et soit x un vecteur de E de norme 1. On a $< (u+v)(x)|x > = < u(x)|x > + < v(x)|x >$. Or

$$< u(x)|x > \geq \lambda_{\min}(u) \text{ et } | < v(x)|x > | \leq |||v|||.||x||.||x|| = |||v||| < \lambda_{\min}(u).$$

On en déduit que $< (u+v)(x)|x > > 0$. En conséquence, $u+v$ est défini positif. On a donc établi que la boule ouverte de $\mathsf{Sym}\, E$ de centre u et de rayon $\lambda_{\min}(u)$ est incluse dans $\mathsf{Sym}_{>0}\, E$; ce dernier est en conséquence un ouvert de $\mathsf{Sym}\, E$, ce qu'il fallait démontrer.

Seconde preuve. Elle est un tout petit peu plus longue, mais repose sur un lemme qui a son intérêt propre. On fixe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Soit u un endomorphisme symétrique de E et soit M sa matrice dans la base en question. On note $(m_{i,j})$ le terme d'indice (i,j) de M. Pour tout r compris entre 1 et n, on désigne par M_r la sous-matrice carrée de taille r de M formée des $m_{i,j}$ où i et j parcourent $\{1, \ldots, r\}$.

Lemme. *L'endomorphisme u est défini positif si et seulement si* $\det M_r > 0$ *pour tout r compris entre 1 et n.*

Démonstration. Soit q la forme quadratique associée à u. Si u est défini positif, alors q est définie positive ; pour tout r, la restriction de q à $\mathsf{Vect}\, (e_1, \ldots, e_r)$ est *a fortiori* définie positive, et comme la matrice de cette restriction dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$ est précisément M_r, on a $\det M_r > 0$.

Réciproquement, supposons que $\det M_r > 0$ pour tout r ; on va montrer par récurrence sur r que pour tout r compris entre 1 et n, la restriction de q à $\mathsf{Vect}\, (e_1, \ldots, e_r)$ est définie positive ; ceci assurera en particulier que q est définie positive, et donc que u est défini positif.

La restriction de q à $\mathsf{Vect}\, e_1$ est l'application $\lambda e_1 \mapsto m_{1,1}\lambda^2$. La matrice M_1 n'est autre que $[m_{1,1}]$. Comme son déterminant est strictement positif, $m_{1,1} > 0$ et $q_{|\mathsf{Vect}\, e_1}$ est donc bien définie positive.

Supposons que $r \geq 2$ et que l'on a montré que $q_{|\mathsf{Vect}\, (e_1, \ldots, e_{r-1})}$ est définie positive. L'espace vectoriel $\mathsf{Vect}\, (e_1, \ldots, e_{r-1}, e_r)$ contient donc un sous-espace de dimension $r-1$ auquel la restriction de q est définie positive ; la signature de $q_{|\mathsf{Vect}\, (e_1, \ldots, e_r)}$ est par conséquent ou bien $(r-1, 0)$, ou bien $(r-1, 1)$, ou bien $(r, 0)$; si l'on était dans le premier cas (resp. le second cas), le déterminant de M_r serait nul (resp. strictement négatif) ; on est donc dans le troisième cas, ce qu'il fallait démontrer.

L'application de $\mathsf{Sym}\, E$ dans $\mathbb{R}^n$ qui envoie u sur $(\det M_1, \ldots, \det M_n)$ est continue, et $\mathsf{Sym}_{>0}\, E$ est d'après ce qui précède l'image réciproque par cette application de l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$; c'est donc un ouvert. $\square$

Exercice. On se propose de démontrer une généralisation du lemme ci-dessus. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie strictement positive n, soit q une forme quadratique sur E et soit M sa matrice dans une base quelconque de E. Notons $m_{i,j}$ le terme d'indice (i,j) de M. Pour tout r compris entre 1 et n, désignons par M_r la sous-matrice carrée de taille r de M formée des $m_{i,j}$ pour i et j appartenant à $\{1, \ldots, r\}$. On suppose que $\det M_r \neq 0$ pour tout r.

Soit r compris entre 1 et n ; on dit *qu'il se produit un changement de signe au rang* r si l'une des deux conditions suivantes est vérifiées :

i) $r = 1$ et $m_{1,1} = \det M_1 < 0$;
ii) $r > 1$ et $\det M_r$ et $\det M_{r-1}$ sont de signes contraires.

Soit s le nombre d'entiers r compris entre 1 et n tels qu'il se produise un changement de signe au rang r ; montrez que la signature de q est $(n - s, s)$.

Question subsidiaire. Pour tout s, on note $\mathscr{Q}_s$ l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur E de signature $(n - s, s)$; on note $\mathscr{Q}$ l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur E. Montrez que les $\mathscr{Q}_s$ sont les composantes connexes de $\mathscr{Q}$ (commencez par préciser quelle topologie vous considérez sur $\mathscr{Q}$).

La racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif

Proposition. *Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$. Il existe un et un seul $v \in \mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$ tel que $v^2 = u$; on le note $\sqrt{u}$. L'on a $|||\sqrt{u}||| = \sqrt{|||u|||}$, et $\sqrt{u}$ est défini positif si et seulement si u est défini positif. L'application $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue ; elle est C^∞ lorsqu'on la restreint à $\mathsf{Sym}_{>0}\ E$.*

Démonstration. Commençons par l'existence. Comme u est symétrique positif, il existe une famille finie $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires positifs et une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telles que $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}\ u = \mathsf{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$; si l'on note v l'endomorphisme de E tel que $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}\ v = \mathsf{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, alors v est symétrique positif et $v^2 = u$. Notons que v est caractérisé par la propriété suivante : *pour toute valeur propre λ de u, le sous-espace propre associé E_λ est stable par v, et $v_{|E_\lambda} = \sqrt{\lambda}\ \mathsf{Id}$.*

Établissons l'unicité. Soit w un endomorphisme symétrique positif de E de carré égal à u ; on va prouver que $w = v$. Soit λ l'une des valeurs propres de u. Comme $w^2 = u$, les endomorphismes w et u commutent, et E_λ est donc stable par w. La restriction de w à E_λ est symétrique positive, donc diagonalisable en base orhonormée. Il existe donc une famille finie $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ de scalaires positifs et une base (orthonormée) de E_λ dans laquelle la matrice de w est $\mathsf{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r)$. L'égalité $w^2 = u$, combinée au fait que $u_{|E_\lambda} = \lambda\mathsf{Id}$, entraîne aussitôt que $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ pour tout i ; on en conclut que $w = v$.

Il résulte de la construction de $\sqrt{u}$ $(= v)$ donnée ci-dessus que $\sqrt{u}$ est défini positif si et seulement si u est défini positif ; l'égalité $|||\sqrt{u}||| = \sqrt{|||u|||}$ est triviale si $E = \{0\}$; si $\dim E > 0$, elle découle des égalités

$$|||\sqrt{u}|||| = \lambda_{\max}(\sqrt{u}) = \sqrt{\lambda_{\max}(u)} = \sqrt{|||u|||}$$

(la première et la troisième ont été vues plus haut ; la seconde est une conséquence immédiate de la construction de $\sqrt{u}$).

Montrons que $\sqrt{\ }$ est continue. Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de $\mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$ et soit u sa limite ; on va vérifier que $\sqrt{u_n} \to \sqrt{u}$. La suite (u_n) étant convergente, elle est bornée. Soit R un réel strictement positif tel que $|||u_n||| \leq R$ pour tout n. De ce qui précède, on déduit que la suite $\sqrt{u_n}$ prend ses valeurs dans la boule fermée de rayon $\sqrt{R}$ de l'espace $\mathsf{Sym}\ E$. Cette boule est compacte ; on va montrer que toute valeur d'adhérence de $(\sqrt{u_n})$ est égale à $\sqrt{u}$, ce qui permettra de conclure. Soit donc a une telle valeur d'adhérence. Il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sqrt{u_{\varphi(n)}} \to a$; comme $\mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$ est fermé, $a \in \mathsf{Sym}_{\geq 0}\ E$. Par continuité de l'élévation au carré, $u_{\varphi(n)} \to a^2$; comme par ailleurs $u_n \to u$, l'on a $a^2 = u$. Ainsi, a est un endomorphisme symétrique positif de E de carré égal à u ; en vertu de l'unicité déjà démontrée, $a = \sqrt{u}$.

Passons maintenant au caractère C^∞ de la restriction de $\sqrt{\ }$ à $\mathsf{Sym}_{>0}\ E$. On sait déjà que l'élévation au carré induit une bijection C^∞ (car donnée par des formules polynomiales) de $\mathsf{Sym}_{>0}\ E$ sur lui-même, dont la réciproque est $\sqrt{\ }$. Pour établir que cette dernière est C^∞ il suffit de démontrer, en vertu du théorème d'inversion locale (ou plus précisément de l'un de ses corollaires dit « théorème d'inversion *globale* »), que $\mathsf{D}_{u_0}(u \mapsto u^2)$ est inversible en tout point u_0 de $\mathsf{Sym}_{>0}\ E$. Fixons donc un tel u_0 ; la différentielle considérée est l'application linéaire de $\mathsf{Sym}\ E$ dans lui-même qui envoie h sur $u_0 h + h u_0$. On va s'assurer de son injectivité, qui entraînera son inversibilité puisque $\mathsf{Sym}\ E$ est de dimension finie.

Supposons que $u_0 h + h u_0 = 0$, et montrons que $h = 0$. Soit x un vecteur propre de u_0, associé à une certaine valeur propre λ, nécessairement strictement positive (puisque $u_0 \in \mathsf{Sym}_{>0}\ E$). On a

$$u_0(h(x)) = -h(u_0(x)) = -h(\lambda x) = -\lambda h(x).$$

Comme le réel $-\lambda$ est strictement négatif, il n'est pas valeur propre de u_0 ; dès lors $h(x) = 0$.

Ceci vaut pour tout vecteur propre x de u_0. L'endomorphisme u_0 étant symétrique, il est diagonalisable et ses vecteurs propres engendrent donc E ; de ce fait, h est l'application nulle. □

La décomposition polaire

Théorème (décomposition polaire). *Soit E un espace vectoriel euclidien. L'application $\mathbf{p}$ de $\mathsf{O}(E) \times \mathsf{Sym}_{>0}\ E$ dans $\mathsf{GL}(E)$ qui envoie (u, m) sur um est un homéomorphisme.*

Démonstration. Comme $\mathbf{p}$ est donnée par des formules polynomiales, elle est continue. Il reste à s'assurer qu'elle est bijective, et que sa réciproque est continue.

Soit v appartenant à $\mathsf{GL}(E)$. On va montrer qu'il a un et un seul antécédent par $\mathbf{p}$.

Unicité de l'antécédent. Supposons que $v = \mathbf{p}(u, m)$ pour un certain (u, m). On a $v = um$ et donc $v^*v = m^*mu^*um = m^2$ puisque u est une isométrie et puisque m est symétrique. Dès lors m est un endomorphisme symétrique défini positif de carré égal à v^*v ; comme ce dernier est par sa forme même symétrique défini positif, m est nécessairement égal à $\sqrt{v^*v}$; il s'ensuit que $u = vm^{-1} = v\sqrt{v^*v}^{-1}$. L'élément v a donc bien *au plus* un antécédent par $\mathbf{p}$, à savoir $(v\sqrt{v^*v}^{-1}, \sqrt{v^*v})$.

Existence de l'antécédent. On va vérifier que l'unique formule possible, que l'on a exhibée ci-dessus, convient effectivement. L'endomorphisme $\sqrt{v^*v}$ est bien symétrique et défini positif, et l'on a évidemment $v = v\sqrt{v^*v}^{-1}\sqrt{v^*v}$. Il reste à s'assurer que $v\sqrt{v^*v}^{-1}$ est une isométrie. En utilisant la symétrie de $\sqrt{v^*v}^{-1}$, il vient :

$$v\sqrt{v^*v}^{-1}(v\sqrt{v^*v}^{-1})^* = v\sqrt{v^*v}^{-1}\sqrt{v^*v}^{-1}v^* = v(v^*v)^{-1}v^* = \mathsf{Id}.$$

En conséquence, $v\sqrt{v^*v}^{-1}$ est effectivement une isométrie

L'application $\mathbf{p}^{-1}$ est donc donnée par la formule $v \mapsto (v\sqrt{v^*v}^{-1}, \sqrt{v^*v})$. Sa continuité découle de celle de $\sqrt{\ }$ déjà démontrée. □

La dimension 1

Il est important de bien comprendre ce qui se passe lorsque E est de dimension 1 ; ce type de situation élémentaire peut tout à fait être l'objet de nombreuses questions de la part du jury.

Supposons donc que E est une droite vectorielle euclidienne, et soit v un endomorphisme de E. C'est nécesairement la multiplication par un réel λ, et la matrice de v dans *n'importe quelle base* de E est alors égale à $[\lambda]$. C'est en particulier le cas dans chacune des *deux* bases orthonormées de E (qui correspondent aux deux vecteurs unitaires). On en déduit que v est automatiquement symétrique, qu'il est inversible (resp. positif, resp. défini positif) si et seulement si $\lambda \neq 0$ (resp. $\lambda \geq 0$, resp. $\lambda > 0$) et que c'est une isométrie si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Dans ce contexte, si v est l'endomorphisme positif donné par la multiplication par un certain $\lambda \geq 0$, sa racine carrée est simplement la multiplication par $\sqrt{\lambda}$.

Soit maintenant v un endomorphisme inversible de E, c'est-à-dire la multiplication par un scalaire non nul λ. Le théorème de décomposition polaire signifie dans ce cadre que λ peut s'écrire d'une unique manière comme un produit de la forme um, où $u \in \{-1, 1\}$ et où $m > 0$; bien évidemment, cette écriture n'est autre que celle fournie par l'égalité $\lambda = \text{signe}(\lambda).|\lambda|$; la formule $m = \sqrt{v^*v}$ vue plus haut correspond ici à l'identité classique $|\lambda| = \sqrt{\lambda^2}$.

Et notons que la proposition de la page 4 redonne le fait que la racine carrée classique est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; remarquez qu'on ne peut espérer mieux : elle n'est même pas dérivable en 0.