Cours - TD 1 : Holomorphie et analyticité

1 Fonctions holomorphes

Dans toute cette fiche, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$, $\Delta_r(c)$ désigne le disque ouvert de centre c et de rayon r, et $\Delta = \Delta_1(0)$.

1.1 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ avec $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, u, v à valeurs réelles. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z \in \Omega$ si et seulement si u et v sont différentiables en z et vérifient

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z). \tag{1}$$

Interprétation : la jacobienne est la matrice d'une similitude directe

$$Df(z) = |f'(z)| \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \arg(f'(z)) \ [2\pi].$$

1.2 Indice et formule de Cauchy [5]

Théorème 1.2.1. Formule de Cauchy

Soit Ω un ouvert simplement connexe et $f \in H(\Omega)$. Soit γ un chemin fermé dans Ω. On définit, pour $z \notin \gamma^*$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Alors Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω, qui est constante sur chaque composante connexe de $\Omega\backslash\gamma^*$, et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de $\Omega\backslash\gamma^*$. De plus, si $z \in \Omega\backslash\gamma^*$, alors

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Exercice 1.2.2 Contre-exemple

Trouver un contre-exemple au théorème lorsque Ω n'est pas simplement connexe.

Corollaire 1.2.3. Théorème de représentation de Cauchy-Taylor

Pour tout ouvert Ω, toute fonction $f \in H(\Omega)$ est développable en série entière sur Ω. Plus précisément, pour tout disque $\overline{\Delta_r(c)} \subset \Omega$, la série

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-c)^n, \quad a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_r(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

converge sur $\Delta_d(c)$, où $d = d(c, \partial\Omega)$ et on a

$$\forall z \in \Delta_d(c), f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-c)^n.$$

Théorème 1.2.4. Principe du maximum

Soit Ω ouvert connexe, $f \in H(\Omega)$ et $\bar{\Delta}_r(a) \subset \Omega$. Alors on a

$$|f(a)| \leq \max_{\theta} |f(a + re^{i\theta})|,$$

avec égalité si et seulement si f est constante sur Ω.

Exercice 1.2.5 Lemme de Schwarz et autormorphismes de Δ [4]

i Soit $f : \Delta \to \Delta$ holomorphe, avec $f(0) = 0$. Montrer qu'alors on a

$$\forall z \in \Delta,\ |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1.$$

ii Montrer que si, de plus, $\exists c \in \Delta\backslash\{0\}$ tel que $|f(c)| = |c|$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors f est une rotation, i.e. $\exists a \in \partial\Delta, \forall z \in \Delta, f(z) = az$.

iii Application : Montrer que les automorphismes (biholomorphismes) de Δ qui fixent 0 sont exactement les rotations.

iv Montrer finalement que les automorphismes de Δ sont exactement les applications

$$z \mapsto \eta\frac{z-w}{\bar{w}z-1}, w \in \Delta, \eta \in \partial\Delta.$$

On pourra montrer le lemme suivant : si F est un sous-groupe de $Aut(\Delta)$ tel que F agit transitivement sur Δ et $\exists c \in \Delta$ tq F contient le groupe d'isotropie $\{g \in Aut(\Delta), g(c) = c\}$, alors $F = Aut(\Delta)$.

2 Holomorphie et analyticité

2.1 Fonctions analytiques

Définition 2.1.1. Fonctions analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. une fonction f est dite analytique en $z_0 \in \Omega$ si elle est développable en série entière sur un voisinage de z_0 ; elle est dite analytique sur Ω si elle l'est en tout point de Ω.
On définit de même les fonctions analytiques sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- stabilité par somme, produit, inverse, composition...
- si f analytique en z_0, alors ses dérivées aussi et le développement de la dérivée s'obtient en dérivant terme à terme celui de f. En particulier, les coefficients du développement en série entière de f sont uniques et donnés par

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.1.2 VRAI ou FAUX ? [1]

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

i Vrai ou Faux ? f est analytique en x_0 si et seulement si sa série de Taylor en x_0 a un rayon de convergence strictement positif.

ii Vrai ou Faux ? La série de Taylor de f en x_0 peut avoir un rayon de convergence nul.

Exercice 2.1.3 Caractérisation [1]

une fonction f d'une variable réelle est analytique en x_0 si et seulement si f est C^∞ au voisinage de x_0 et

$$\exists A, B > 0, \exists V \text{ voisinage de } x_0,\ \forall x \in V,\ |f^{(n)}(x)| \leq AB^n n!$$

2.2 Rayon de convergence et cercle d'incertitude

Proposition 2.2.1. Rayon de convergence [1]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à R, avec $0 < R < \infty$.

i La série $\sum a_n z^n$ converge pour tout z de module strictement inférieur à R, et diverge pour tout z de module strictement supérieur à R.

ii La série converge absolument pour tout z, $|z| < R$.

iii La série converge normalement sur tout disque fermé $\bar{\Delta}_r(0)$, avec $r < R$.

Exercice 2.2.2 VRAI ou FAUX ?

On note $f(z)$ la somme de la série, lorsqu'elle est définie.

i Vrai ou Faux ? Il existe au moins un z de module R tel que cette série converge.

ii Vrai ou Faux ? Il existe au moins un z de module R tel que cette série diverge.

iii Vrai ou Faux ? Si la série converge en un point z de module R, alors f est DSE en z.

iv Vrai ou Faux ? Si f est DSE en z de module R alors la série $\sum a_n z^n$ converge en z.

v Vrai ou Faux ? Pour tout $z_0 \in \Delta_R(0)$, f est développable en série entière au point z_0 et le rayon de convergence est exactement $R - |z_0|$.

vi Vrai ou Faux ? Il existe au moins un z de module R en lequel f est développable en série entière.

vii Vrai ou Faux ? Il existe au moins un z de module R en lequel f n'est pas développable en série entière.

2.3 Calcul du rayon de convergence

Proposition 2.3.1. Règles de Cauchy-Hadamard et d'Alembert [1]

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors son rayon de convergence vérifie

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}. \qquad \text{(Cauchy-Hadamard)}$$

De plus, si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$, alors $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. (D'Alembert)

Autres méthodes de calcul

- à partir de la définition $\{z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge}\}$: minoration puis majoration du rayon. Ex : $a_n = \cos(n\theta)$.
- utilisation d'une majoration.
- Si $a_n = b_n \lambda_n$ avec $\lambda_n = O(n^\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ alors $R(\sum a_n z^n) \geq R(\sum b_n z^n)$. Ex : $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$.
- utilisation d'un équivalent. Ex : $a_n = \left(\mathrm{ch}\frac{1}{n}\right)^n$.
- Somme : $R(S+T) \geq \min(R(S), R(T))$, avec égalité si $R(S) \neq R(T)$.
- Produit : $R(ST) \geq \min(R(S), R(T))$.
- Dérivée : $R(S') = R(S)$.

2.4 Propriétés des fonctions analytiques

Théorème 2.4.1. Zéros isolés [5]

Soit f une fonction analytique sur Ω ouvert *connexe* et soit $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros. Alors

i ou bien $Z(f) = \Omega$,

ii ou bien $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Dans ce cas, à tout $a \in Z(f)$, on peut associer un unique entier positif m et une unique fonction $g \in H(\Omega)$ tels que $g(a) \neq 0$ et pour $z \in \Omega$, $f(z) = (z-a)^m g(z)$. De plus, $Z(f)$ est alors au plus dénombrable.

Exercice 2.4.2 Transformée de Fourier [6]

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $\phi \neq 0$, localement intégrable et à support compact, dont la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\phi : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-i\omega t} dt$$

soit aussi à support compact.

Corollaire 2.4.3. Prolongement analytique [5]

Si f, g sont analytiques sur Ω ouvert connexe, et si $f = g$ sur un ensemble ayant un point d'accumulation, alors $f = g$ sur Ω.

Exercice 2.4.4 une application [6]

Soit f analytique sur Δ telle que, pour tout $n \geq 1$, $f''(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})$. Montrer que f se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$.

Références

[1] J. M. Arnaudiès, H. Fraysse, Cours de mathématiques, T3, Compléments d'analyse, Dunod université, 1989.

[2] E. Amar, E. Matheron, Analyse complexe, Cassini, 2004.

[3] Pommelet, Analyse Tome 4.

[4] R. Remmert, Theory of complex functions, Springer, 1998.

[5] W. Rudin, Real and complex analysis, Mc Graw Hill.

[6] A. Yger, Analyse complexe, Ellipses, 2014.